単粒子ビーム力学

1. はじめに

円形加速器の単粒子の運動について述べる。実際の加速器では多数の粒子がビームを構成しているが、「単粒子力学」とは粒子の間の相互作用を考えないという意味である。従って、空間電荷効果、ビーム内粒子同士の散乱、ウェーク場(wakefield)などは扱わない。

ビーム力学については、これまでの OHO シリーズに数多くの講義があり、また多くの教科書も出版されている。そこに、筆者のようなものがこのテキストを付け加えることにどれほどの意味があるのか疑問ではあるが、自分なりに理解しているところをまとめてわかりやすく記述することを目指した。

テキストの構成は、まず加速器での座標系のとり方、加速器の基本的な磁場中の荷電粒子の運動について簡単に述べる。そのあと、線形近似に基づく横方向の運動を運動方程式から出発して論じる（ベータ関数、チューン、エミッタンスなどといった加速器で頻繁に使われるパラメータを導入する）。次に縦方向（ビーム進行方向）の運動について簡単に触れた後、電子（陽電子）ビームの場合に重要となるシンクロトロン放射とその効果（放射減衰、放射励起など）を論じる。
最後に、ハミルトニアンを用いた運動の取り扱いを紹介する。

ところで、今回の OHO のテーマは「医療用加速器」となっている。申し訳ないことに、この講義ではこのテーマのことは全く考慮していない（どちらかというと素粒子物理学の実験のための非常にエネルギーの高い加速器を想定しているところがあるかもしれない）。一般的な加速器の基礎であると理解していただければと思う。

2. 座標系

「直交曲線座標系」が広く使われている。
まず基準となる閉じた軌道（基準軌道）を決める。実際の粒子が通りうる軌道と完全に一致していなくても良いが、普通は設計上の軌道を基準軌道とする。又、ここでは基準軌道が平面内にあると仮定する。すなわち、ビームの軌道は常にある平面の近くにあるとする（以下では、この面を水平面とする）。

運動を記述する独立変数として、基準軌道上の行程 s を取る。s の原点は任意に取れる。また、ビームが周回する度に、s は基準軌道の周長分だけ加算されていく（周長を L とするとき、物理的に同じ点が周回のたびに s 、$s+L$ 、$s+2L$ となっていく）。(Fig. 1)

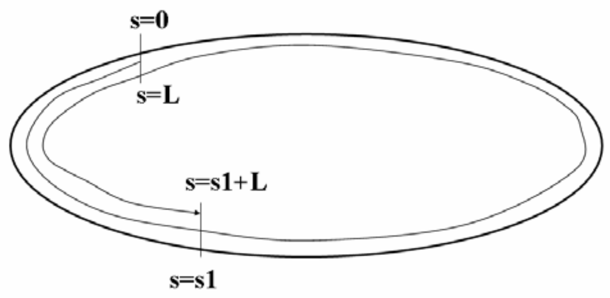

Fig. 1　基準軌道上の「行程」 s

基準軌道の近くのある点（P）の s を以下のように定義する（Fig. 2 参照）: P と、行程が s である基準軌道上の点（Q）を結んだ直線が、基準軌道とその点で局所的に垂直であるとき、点 P の行程を s と定義する。図の点 P2 のように、基準軌道から遠く離れた点の s は一意的に決めることができない。このような考察から、基準軌道はどのようにとっても良いわけではなく、ビーム内の粒子が常に基準軌道の近くを通るように決める必要があること、又、軌道の曲率半径がゼロになるような点（キンク）があってはいけないことがわかる。（ここの議論は数学的に厳密とは言えないが、実際上問題となることはないと思う。）

次に、基準軌道上の各点に於いて局所直交座標の各軸の向きを定義する(Fig. 3)。基準軌道上の各点（s）で基準軌道の向きを $\overrightarrow{z(s)}$ とする（以下、$\overrightarrow{x(s)}$ 、$\overrightarrow{y(s)}$ 、$\overrightarrow{z(s)}$ は単位ベクトルとする）。基準軌道が含まれる平面上で

$$\left(\frac{d\vec{z}}{ds}\right)_s \perp \overrightarrow{x(s)} \tag{2-1}$$

となるように方向$\overrightarrow{x(s)}$を定義する。

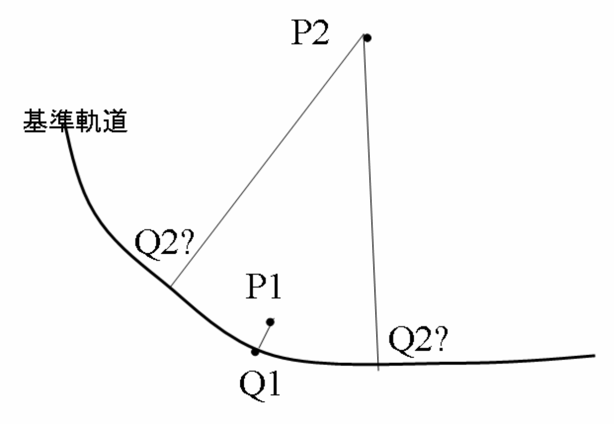

Fig. 2、「行程」 s の定義。基準座標の近くの点（P1）では対応する基準軌道上の点 Q1 が一意的に決まり s を定義できるが、遠い点の s は定義できない。

$\vec{y}$ は s に依らず、基準軌道が含まれる平面に垂直な方向に取る（$\overrightarrow{x(s)}$ と $\overrightarrow{z(s)}$ に垂直)。

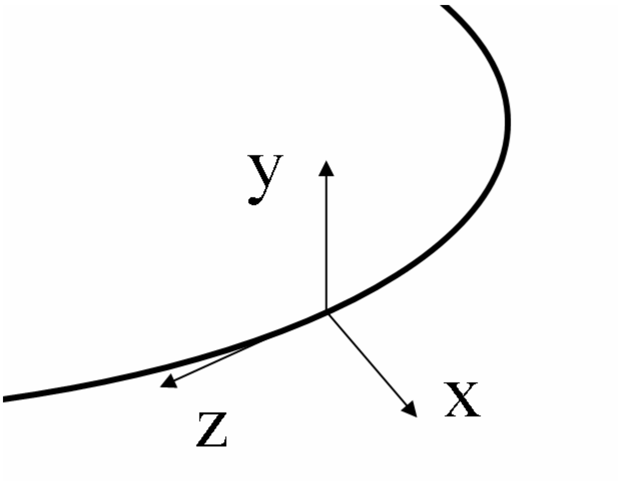

Fig. 3 曲線直交座標

基準軌道が一つの平面からずれる場合には座標系の定義について考え直す必要があるが、本質的な問題ではないと思うのでこの講義では省略する。

次に、運動を表す位置変数を考える。$\overrightarrow{x(s)}$、$\vec{y}$ 方向のずれを $x(s)$、$y(s)$ とする。独立変数として s を選んだために $\overrightarrow{z(s)}$ 方向の位置のずれは常にゼロであり、運動を表す変数にならない。そこで、粒子が s を通過する時刻の基準からのずれ（$t(s)$）を採用する。粒子が s を通過する時刻を $T(s)$、基準となる時刻を $T_0(s)$ とするとき、$t(s) \equiv T(s) - T_0(s)$ である。

3. 電磁場中のビーム（荷電）粒子の運動

3.1. 基礎

電荷 e、速度 $\vec{v}$ を持つ粒子が電場 $\vec{E}$、磁場 $\vec{B}$ のなかで受ける力は、

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B} \tag{3-1}$$

である。
また、このテキストは「単粒子」力学なので、ビーム自身が作る電磁場は考えない。従って、ビームの感じる電磁場は真空中のマックスウェル方程式

$$\begin{aligned} rot\vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ rot\vec{B} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{3-2}$$

$$\begin{aligned} div\vec{E} = 0 \\ div\vec{B} = 0 \end{aligned} \tag{3-2}$$

を満たす。

3.2. 横方向の磁場とビーム運動の展開

「ビーム」とは位置と方向のよく揃った粒子の集団のことである。方向がよく揃っていることから、粒子の速度はほぼ $\vec{z}$ 方向を向いている（進行方向、ビーム軸方向あるいは縦方向などと言う。これに垂直な方向を「横方向」と言う。)。従って、粒子の運動に影響を与えるのは横方向の磁場である。また、位置が揃っていることから、$x(s)$、

$y(s)$（横方向の位置）は小さいので、磁場を多重極展開するのが便利である。

3.2.1. 磁場の多重極展開

横方向の磁場は、一般に以下のように展開できる。極座標(r,θ)を使い、

$$\vec{B} = \sum_n \vec{B}_{a,n} + \sum_n \vec{B}_{b,n} \tag{3-3}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_{a,n} = a_n \{&\vec{x} r^{n-1}\sin[(n-1)\theta] \\ &+ \vec{y} r^{n-1}\cos[(n-1)\theta]\}\end{aligned} \tag{3-4}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_{b,n} = b_n \{&\vec{x} r^{n-1}\cos[(n-1)\theta] \\ &- \vec{y} r^{n-1}\sin[(n-1)\theta]\}\end{aligned} \tag{3-5}$$

$$(x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta)$$

各項で表される磁場を磁石で作る場合の磁極の数は$2n$であり、aの付く項はnormal multi-pole field、bの付く項はskew multi-pole fieldなどと呼ばれる。

$\vec{B}_{a,1}$は$\vec{y}$に平行であり、水平方向にビームを曲げるための二極磁場（bending field）である。さらに、$\vec{B}_{b,1}$は垂直方向ビーム曲げるための二極磁場、$\vec{B}_{a,2}$は四極磁場、$\vec{B}_{b,2}$はskew 四極磁場、$\vec{B}_{a,3}$は六極磁場、等々である。各々、

$$\vec{B}_{a,1} = a_1\vec{y} \tag{3-7}$$

$$\vec{B}_{b,1} = b_1\vec{x} \tag{3-8}$$

$$\vec{B}_{a,2} = a_2(x\vec{y} + y\vec{x}) \tag{3-9}$$

$$\vec{B}_{b,2} = b_2(x\vec{x} - y\vec{y}) \tag{3-10}$$

$$\vec{B}_{a,3} = a_3\left(2xy\vec{x} + (x^2 - y^2)\vec{y}\right) \tag{3-11}$$

等々と書ける。

粒子の速度はほぼ$\vec{z}$方向なので、水平方向の磁場は粒子を垂直方向に曲げ、垂直方向の磁場は粒子を水平方向に曲げる。

加速器を構成する磁石のほとんどは、１個の多重極成分を持つように設計される。例外として四極磁場成分を持つ偏向磁石があり、normal の n=1 と n=2 の 2 個の成分を持ち、「combined function bending magnet」、「combined bend」などと呼ばれる。

n>2 の skew 成分を持つ磁石は、誤差の影響を補正する目的以外にはほとんど使われない（設計上は強さがゼロ）。又、n>3 の磁石が使われることもほとんどないので、以下では、normal n=1, 2, 3 の磁石と skew n=2 の磁石での運動を具体的に考察する。

3.2.2. ビーム運動の線形近似と輸送行列

ビーム粒子が横方向に受ける力は一般にその位置(x,y)に依存するが、ビーム粒子は基準軌道の近くを通ることから、これを展開して、x、yの１次まで取って考察することがが便利なことが多い（線形近似）。

粒子の運動は、

$$x' \equiv \frac{dx}{ds}, \quad y' \equiv \frac{dy}{ds} \tag{3-12}$$

として、(x,x',y,y')をsの関数として記述することで表せるが、線形近似の場合、任意の場所s_1からs_2への輸送行列（transfermatrix）を用いるのが便利である。すなわち、

$$\begin{pmatrix} x(s_2) \\ x'(s_2) \\ y(s_2) \\ y'(s_2) \end{pmatrix} = M(s_2,s_1)\begin{pmatrix} x(s_1) \\ x'(s_1) \\ y(s_1) \\ y'(s_1) \end{pmatrix} \tag{3-13}$$

で、$M(s_2,s_1)$が輸送行列で、4x4 行列である。

水平方向の運動と垂直方向の運動とが独立の（カップリングがない）場合には、x と y を分離して 2x2 の輸送行列を扱うことができる。

輸送行列が便利であるのは、加速器の各構成要素毎に（あるいはさらに細かく）ビームラインを分

割して、各要素の輸送行列がわかれば、全体の輸送行列はそれを掛け合わせることで求められるからである。すなわち、一般に以下が成り立つ。

$$M(s_n, s_1) = M(s_n, s_{n-1}) M(s_{n-1}, s_{n-2}) \cdots M(s_2, s_1) \tag{3-14}$$

又、リング１周の輸送行列 $M(L+s_1, s_1)$（L は周長）なども考えられ、リング N 周の輸送行列はこれの N 乗、

$$M(NL+s_1, s_1) = M^N(L+s_1, s_1) \tag{3-15}$$

などとなる。

3.2.3.　２極磁石（bending magnet）

normal n=1 の磁場中で粒子は水平方向に曲げられる。
無限小角度を持つ扇型の磁石（曲率半径 ρ_0、角度 ds/ρ_0 とする）で、基準軌道（設計軌道）からの位置と角度のずれ (x, x') の変化を考える。図のように、基準軌道上で s が ds 進む間に粒子は磁場中を長さ $ds(\rho_0+x)/\rho_0$ だけ移動する(Fig. 4)。ここでは粒子のエネルギーのずれはないものとするので、角度の変化は磁場中を移動した距離に比例する。従って、その間の角度の変化は設計軌道の角度変化 $-ds/\rho_0$ の $(\rho_0+x)/\rho_0$ 倍になるはずで、角度の設計（基準）軌道からのずれの変化は、これと $-ds/\rho_0$ との差になる。故に、x' の変化は

$$\frac{dx'}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{x}{\rho_0^2} \tag{3-16}$$

となり、$1/\rho_0^2$ に比例する収束力を持つことがわかる。一般解は

$$x(s) = A\cos(s/\rho_0) + B\sin(s/\rho_0) \tag{3-17}$$

となり、これから、有限の設計角度変化を持つ扇型の２極磁石の入口の $(x, x')_{\mathrm{ent}}$ と出口の $(x, x')_{\mathrm{ext}}$ は以下のように書けることがわかる。

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\mathrm{ext}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho_0 \sin\theta \\ \frac{-1}{\rho_0}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\mathrm{ent}} \tag{3-18}$$

θ は設計上の軌道の曲げ角である。
垂直方向には力が働かないので、

$$\frac{dy'}{ds} = 0 \tag{3-19}$$

であり、

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\mathrm{ext}} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_0\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\mathrm{ent}} \tag{3-20}$$

と書ける。
なお、ここでは、磁石の端面が設計軌道に垂直であると仮定し、端部での磁場の変化の効果を考えなかった。磁石の端面が傾いていると、端部で水平垂直方向に収束または発散を引き起こす効果が生ずるが、ここでは詳しいことは省略する。
又、上の式では x, x', y, y' の２次以上の項は無視している。

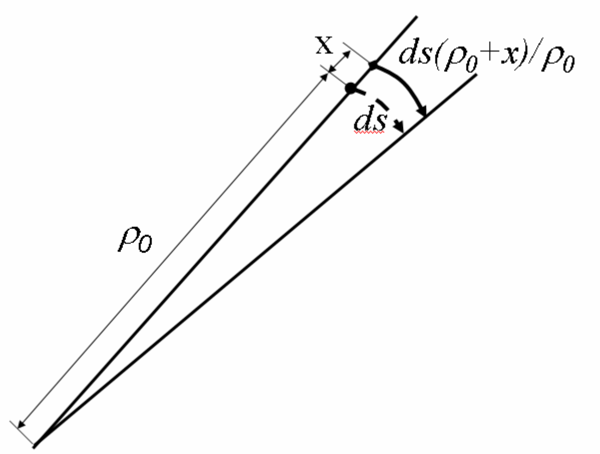

Fig. 4 微小角度の扇型２極磁場内の運動

3.2.4.　４極磁石（quadrupole magnet）

４極磁石内の運動を考える。式(3-1)、(3-9)から

$$\frac{dp_x}{ds} = -ea_2 x \tag{3-21}$$

であり、ビームの設計運動量を p_0 とすると、$x' = p_x/p_z \approx p_x/p_0$　なので、

$$\frac{dx'}{ds} = -\frac{ea_2}{p_0} x \tag{3-22}$$

となり、垂直方向も同様に、

$$\frac{dy'}{ds} = \frac{ea_2}{p_0} y \qquad (3\text{-}23)$$

であり、長さ l の磁石では、$K = \sqrt{|ea_2 / p_0|}\,l$ として、$ea_2 / p_0 \geq 0$ の場合、水平方向に収束で、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\mathrm{ext}} = \begin{pmatrix} \cos K & l \sin K \\ \frac{-1}{l}\sin K & \cos K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\mathrm{ent}} \qquad (3\text{-}24)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\mathrm{ext}} = \begin{pmatrix} \cosh K & l \sinh K \\ \frac{1}{l}\sinh K & \cosh K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\mathrm{ent}} \qquad (3\text{-}25)$$

$ea_2 / p_0 \leq 0$ の場合、垂直方向に収束で、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\mathrm{ext}} = \begin{pmatrix} \cosh K & l \sinh K \\ \frac{1}{l}\sinh K & \cosh K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\mathrm{ent}} \qquad (3\text{-}26)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\mathrm{ext}} = \begin{pmatrix} \cos K & l \sin K \\ \frac{-1}{l}\sin K & \cos K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\mathrm{ent}} \qquad (3\text{-}27)$$

と書ける。
又、磁石の長さが短い場合の近似（thin lens 近似）として、

$$k = (ea_2 / p_0)l \qquad (3\text{-}28)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\mathrm{ext}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\mathrm{ent}} \qquad (3\text{-}29)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\mathrm{ext}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\mathrm{ent}} \qquad (3\text{-}30)$$

が使われることもある。

3.2.5. sextupole magnet

６極磁石について考える。６極磁石は色収差（粒子のエネルギーの違いによって生じる収束の違いによる振動の位相のずれ）を補正するために広く使われている（後の節を参照）。
式(3-11) から

$$\frac{dx'}{ds} = -\frac{ea_3}{p_0}(x^2 - y^2) \qquad (3\text{-}31)$$

$$\frac{dy'}{ds} = \frac{2ea_3}{p_0} xy \qquad (3\text{-}32)$$

である。６極磁場は非線形運動を引き起こすので、入口から出口への変化を輸送行列で書くことはできない。

3.2.6. skew 4 極磁石

skew n=2 の磁場中では、式(3-1)、(3-10)から、

$$\frac{dx'}{ds} = \frac{eb_2}{p_0} y \qquad (3\text{-}33)$$

$$\frac{dy'}{ds} = \frac{eb_2}{p_0} x \qquad (3\text{-}34)$$

となる。これを解くのは難しくはないが面倒になるのでここでは省力し、長さが非常に短い場合の近似（thin lens）での輸送行列のみ書いておく。

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_{\mathrm{ext}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_s & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_{\mathrm{ent}} \qquad (35)$$

ここで、

$$k_s \equiv \frac{2b_2}{p_0} l \qquad (36)$$

である。

4. 横方向の運動

粒子のエネルギー（ビーム進行方向の運動量）は変化しないものとして、ビームの進行方向に垂直な方向（x 方向、y 方向）の運動を考える。
厳密には、エネルギーが一定であることと進行方向の運動量が一定であることは異なるが、「ビーム」とは位置と運動方向が（ある程度）揃った粒子の集団であり、各粒子の横方向の運動量は進行方向の運動量に比べて小さいと考えてよい。従って、

$$E' \equiv \sqrt{p_z^2 + mc^2} \tag{4-1}$$

と書くと、粒子のエネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{p_z^2 + p_x^2 + p_y^2 + mc^2} \\ &= E' + O\left(p_x^2 / E'^2\right) + O\left(p_y^2 / E'^2\right) \end{aligned} \tag{4-2}$$

となって、近似的に進行方向の運動量のみで決まる。

4.1. 閉軌道

ある場所 s で (x_0, x_0', y_0, y_0') であった粒子が、1 周したあとの同じ場所 s＋L で (x_1, x_1', y_1, y_1') になるとする。$(x_0, x_0', y_0, y_0') = (x_1, x_1', y_1, y_1')$ となるような粒子の軌道を「閉軌道」と呼ぶ。ここではエネルギーの変化や量子論的効果を考えないことにすると、ある時点で (x, x', y, y') が与えられれば、その粒子のすべての運動が一意的に決まるはずである。又、閉軌道にある粒子は閉軌道を永久に回り続ける。

一般には閉軌道が存在しないこともあると思われるが、そのような場合はビームが安定に回らないであろう。また、閉軌道が複数存在するかもしれないが、そのうちの１つを選ぶことに本質的な問題はない。従って以下では閉軌道が１つあるとして話を進める。

s での閉軌道を $(x_C(s), x_C'(s), y_C(s), y_C'(s))$ と書くことにする。そして、以下では、横方向の運動を表す変数として、閉軌道からのずれを考える（$x \to x - x_C$ などとする）。

4.2. ベータトロン振動

4.2.1. 線形運動の解

ここではとりあえず、x 方向の運動と y 方向の運動に相互作用（カップリング）がないとして、x 方向の運動のみ考える（x を y と書き換えれば全く同じように y 方向の運動を記述できる）。

運動方程式が線形であるとする（x が微小で高次の項が無視できることを仮定）。すなわち、

$$x'' + K(s)x = 0 \tag{4-3}$$

と書ける。ここで、$K(s)$ が磁場の 4 極成分による収束（又は発散）を表す項であり、周上の同じ点では同じはずなので、

$$K(s+L) = K(s) \tag{4-4}$$

という周期条件が成り立つ（L はリング周長)。この形の方程式は「Hill の方程式」と呼ばれ、解が、

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)}\cos(\phi(s) + \phi_0) \tag{4-5}$$

と、振動の形に書けることが分かっている（そのような数学の定理がある)。ここで、a と ϕ_0 は初期条件から決まる定数（s に依らない）で、$\phi(s)$ と $\beta(s)$ には

$$\frac{1}{\beta(s)} = \frac{d\phi(s)}{ds} \tag{4-6}$$

の関係がある。さらに、$\beta(s)$ は「ベータ関数」と呼ばれる非常に有名なパラメーターであり、周期関数で、

$$\beta(s+L) = \beta(s) \tag{4-7}$$

が成り立つ。$\beta(s)$ が一定ではないのでこの運動は調和振動ではないが、振幅が変化する振動と見ることができる。この運動を「ベタートロン振動」と呼ぶ。

$x(s)$ を s で微分して、

$$\begin{aligned} x'(s) = -\frac{a}{\sqrt{\beta(s)}}\big[&\sin(\phi(s) + \phi_0) \\ &+ \alpha\cos(\phi(s) + \phi_0)\big] \end{aligned} \tag{4-8}$$

が得られる。ただし、$\alpha(s)$ は

$$\alpha(s) \equiv -\frac{1}{2}\frac{d\beta(s)}{ds} \tag{4-9}$$

と定義される周期関数である。

$\phi(s)$ はベータトロン位相の進み（phase advance）と呼ばれ、一周した時の変化は、

$$
\begin{aligned}
\phi(s_1+L)-\phi(s_1) &= \int_{s_1}^{s_1+L}\frac{ds}{\beta(s)} \\
&= \int_0^L \frac{ds}{\beta(s)} - \int_0^{s_1}\frac{ds}{\beta(s)} + \int_L^{s_1+L}\frac{ds}{\beta(s)}
\end{aligned} \tag{4-10}
$$

であり、$\beta(s)$が周期関数であることから、

$$
\int_L^{s_1+L}\frac{ds}{\beta(s)} = \int_L^{s_1+L}\frac{ds}{\beta(s-L)} = \int_0^{s_1}\frac{ds'}{\beta(s')} \tag{4-11}
$$

となり、

$$
\phi(s_1+L)-\phi(s_1) = \phi(L)-\phi(0) = \varphi = 2\pi\nu \tag{4-12}
$$

と書ける。すなわち、一周当たりの位相の進みφは出発点に依らずに一定である。これを2πで割ったνは「チューン」と呼ばれる、これも有名（且つ重要な）パラメータである。

4.2.2. 輸送行列

式(4-5)と(4-8)から、任意の２点（s_1、s_2）間の輸送行列$M(s_2,s_1)$は、

$$
M(s_2,s_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{\beta_2}{\beta_1}}(\cos\psi+\alpha_1\sin\psi) & \sqrt{\beta_2\beta_1}\sin\psi \\ -\dfrac{(1+\alpha_2\alpha_1)\sin\psi+(\alpha_2-\alpha_1)\cos\psi}{\sqrt{\beta_2\beta_1}} & \sqrt{\dfrac{\beta_1}{\beta_2}}(\cos\psi-\alpha_2\sin\psi) \end{pmatrix} \tag{4-13}
$$

と書けることがわかる。（ここで、$\psi\equiv\phi(s_2)-\phi(s_1)$と定義し、$\beta(s_1)$を$\beta_1$、$\alpha(s_2)$を$\alpha_2$などと書いた。）

又、任意の２点間の輸送行列の行列式が１であることも確かめられる。

特に、１周回った場合の輸送行列$M(L+s_1,s_1)$は、$\varphi=2\pi\nu$とすると、

$$
M(L+s_1,s_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi+\alpha_1\sin\varphi & \beta_1\sin\varphi \\ -\dfrac{1+\alpha_1^2}{\beta_1}\sin\varphi & \cos\varphi-\alpha_1\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{4-14}
$$

となり、さらにn周回った場合の輸送行列$M(nL+s_1,s_1)$は

$$
\begin{aligned}
M(nL+s_1,s_1) &= M^n(L+s_1,s_1) \\
&= \begin{pmatrix} \cos n\varphi+\alpha_1\sin n\varphi & \beta_1\sin n\varphi \\ -\dfrac{1+\alpha_1^2}{\beta_1}\sin n\varphi & \cos n\varphi-\alpha_1\sin n\varphi \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4-15}
$$

であり、$M(L+s_1,s_1)$の位相の進みをn倍すれば良いことがわかる。

4.2.3. 運動の安定性

式(4-5)から、振動の振幅はリングを何回周回しても元の場所に戻れば同じであり、運動は安定であるように見える。しかし、必ずそうであるとは限らない。式(4-3)の形の方程式の解は数学の定理により必ず式(4-5)のように書けるが、ここで出てくるパラメータが実数である保証はない。実際、$K(s)$によっては、ϕ、β、αが純虚数となることがある。この場合、実数パラメータ

$$
\begin{aligned}
\bar{\beta} &= i\beta \\
\bar{\alpha} &= i\alpha \\
\bar{\phi} &= -i\phi \\
\bar{a} &= \frac{1-i}{\sqrt{2}}a
\end{aligned} \tag{4-16}
$$

を導入すると、解は、

$$
x(s) = \bar{a}\sqrt{\bar{\beta}(s)}\cosh(\bar{\phi}(s)+\bar{\phi}_0) \tag{4-17}
$$

$$
\begin{aligned}
x'(s) = -\frac{\bar{a}}{\sqrt{\bar{\beta}(s)}}\Big[&-\sinh(\bar{\phi}(s)+\bar{\phi}_0) \\
&+\alpha\cosh(\bar{\phi}(s)+\bar{\phi}_0)\Big]
\end{aligned} \tag{4-18}
$$

のようになり、$\bar{\phi}(s)$ が大きくなると指数関数的に増大し、発散してしまう。このような場合には粒子を安定に周回させることができない。
運動が安定であるかどうかを 1 周の輸送行列から判断することもできる。式(4-14)から、輸送行列の対角和が、

$$Tr\left[M(L+s,s)\right]=2\cos\varphi \tag{4-19}$$

であり、s に依らないことがわかり、運動が安定（φ が実数）となる条件として、

$$\left|Tr[M]\right|\le 2 \tag{4-20}$$

が得られる。（φ が純虚数の場合、$\varphi=-i\bar{\varphi}$ として、$\cos\varphi=\cosh\bar{\varphi}>1$ である。）

4.2.4. Courant-Snyder 不変量

式(4-5)、(4-8)から、

$$\frac{1}{\beta}x^2+\beta\left(x'+\frac{\alpha}{\beta}x\right)^2 \tag{4-21}$$
$$=\frac{1+\alpha^2}{\beta}x^2+2\alpha xx'+\beta x'^2=a^2$$

となり、これは s に依らないことがわかる。これを、Courant-Snyder 不変量と呼ぶ。
又、

$$X\equiv\frac{x}{\sqrt{\beta}} \tag{4-22}$$

$$\dot{X}\equiv\frac{dX}{d\phi}=\sqrt{\beta}x'+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}x \tag{4-23}$$

という規格化座標を定義すると、

$$X=a\cos(\phi+\phi_0) \tag{4-24}$$

$$\dot{X}=-a\sin(\phi+\phi_0) \tag{4-25}$$

となり、調和振動の形になる。
一つの粒子が何回も周回するときのある場所での (x,x') を考えると、式(4-5),(4-8)で ϕ を変化させて得られる楕円の上にあるはずで、Fig. 5 のようになる。さらに、何回も周回するときのここでの x^2 、xx'、x'^2 の平均は、

$$\left\langle x^2\right\rangle=\beta a^2/2$$

$$\left\langle xx'\right\rangle=-\alpha/a^2 2 \tag{4-26}$$

$$\left\langle x'^2\right\rangle=\frac{1+\alpha^2}{\beta}a^2/2$$

であることも簡単に確かめられる。

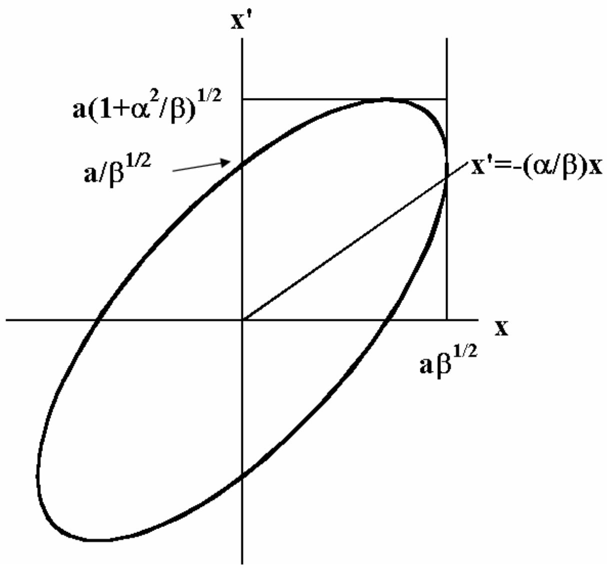

Fig. 5 ある粒子の位置と角度は、何回周回しても x-x' 面上の一定の楕円の上にある。

4.2.5. エミッタンス

ビーム内の多数の粒子の分布を考える。ビームの位置と角度分布の広がりを表す量として、エミッタンスがある。定義は、

$$\varepsilon_x\equiv\sqrt{\left\langle x^2\right\rangle\left\langle x'^2\right\rangle-\left\langle xx'\right\rangle^2} \tag{4-27}$$

である。$\langle\ \rangle$ は全粒子の平均を表す。
エミッタンスは線形の運動、すなわち

$$\frac{d^2x(s)}{ds^2}+K(s)x(s)=0 \qquad (4\text{-}28)$$

と書ける場合保存する。それは、エミッタンスの２乗、$\langle x^2\rangle\langle x'^2\rangle-\langle xx'\rangle^2$、を s で微分したものがゼロになることで確かめられる。又、同じことだが、輸送行列の行列式が 1 であることからもエミッタンスが保存することが導かれる。

各粒子の運動は式(4-5),(4-8)で表されるが、全粒子の平均を取るには、初期状態で決まる振動の振幅(a)と位相(ϕ_0)についての平均を取ればよく、

$$\begin{aligned}\varepsilon^2&=\left\langle a^2\sin^2\phi_0\right\rangle\left\langle a^2\cos^2\phi_0\right\rangle\\&\quad-\left\langle a^2\sin\phi_0\cos\phi_0\right\rangle^2\\&=\frac{1}{4}\left\langle a^2\right\rangle^2\\&\quad-\frac{1}{4}\left(\left\langle a^2\sin(2\phi_0)\right\rangle^2+\left\langle a^2\cos(2\phi_0)\right\rangle^2\right)\end{aligned} \qquad (4\text{-}29)$$

となる。この式で、ϕ_0 に全粒子に対して共通の位相 ϕ を加えてもこの量が不変であること、

$$\begin{aligned}&\left\langle a^2\sin^2(\phi+\phi_0)\right\rangle\left\langle a^2\cos^2(\phi+\phi_0)\right\rangle\\&\quad-\left\langle a^2\sin(\phi+\phi_0)\cos(\phi+\phi_0)\right\rangle^2\\&=\left\langle a^2\sin^2(\phi_0)\right\rangle\left\langle a^2\cos^2(\phi_0)\right\rangle\\&\quad-\left\langle a^2\sin(\phi_0)\cos(\phi_0)\right\rangle^2\end{aligned} \qquad (4\text{-}30)$$

すなわち、エミッタンスが不変量であることは簡単に確かめられる。(a と ϕ_0 は粒子毎に異なる量である。)

4.2.6. マッチング

ある場所でのビームの大きさとして、全粒子の位置の標準偏差を取ると、

$$\begin{aligned}\sigma_x(s)&\equiv\sqrt{\left\langle x^2(s)\right\rangle}\\&=\sqrt{\beta(s)\left\langle a^2\cos^2(\phi(s)+\phi_0)\right\rangle}\end{aligned} \qquad (4\text{-}31)$$

となる。ただし、ビームの中心の位置はゼロとする（$\langle x\rangle=0$）。ここで、$\left\langle a^2\cos^2(\phi(s)+\phi_0)\right\rangle$は一般には不変でない（$\phi(s)$に依存する）ことに注意が必要である。従って、同じ場所（同じβ）でビームの大きさを見ても、周回する度にビームの大きさが変化する。

特別な場合として、ϕ_0 が 0 から 2π まで一様に分布している（従って、a と ϕ_0 の間に相関関係がない）とすると、平均を取ることで、

$$\begin{aligned}&\left\langle\cos^2\right\rangle\to 1/2,\quad\left\langle\sin^2\right\rangle\to 1/2\\&\left\langle\cos\sin\right\rangle\to 0\end{aligned} \qquad (4\text{-}32)$$

とできるので、式(4-31)、(4-29)から

$$\sigma_x(s)=a\sqrt{\beta(s)/2} \qquad (4\text{-}33)$$

$$\varepsilon=\left\langle\frac{a^2}{2}\right\rangle \qquad (4\text{-}34)$$

であることがわかる。これから、

$$\sigma_x(s)=\sqrt{\varepsilon\beta(s)} \qquad (4\text{-}35)$$

と書ける。このような場合には、ある場所での粒子の x-x'面上での分布は Fig.5 のような楕円状になっており、どの周回でも分布は変わらない。ビーム粒子の分布の形が、ビームラインのパラメータである β、α によって決まる形に合っているわけである。このような状態を「マッチング」が取れているなどと言う。

ところで通常、粒子がビームパイプにあたって失われてしまうことをできるだけ避けるために、(特にアパーチャーの小さい場所で) 何回も周回した時の最大のビームの大きさが小さいことが求められる。マッチングが取れているビームは、一定のエミッタンスを仮定した場合、最も小さい最大のビームの大きさを与える分布でもある。

陽子などの加速器では粒子の分布は入射時にほとんど決まってしまう。一方、電子、陽電子のリング加速器の場合は、後に述べるようにシンクロトロン放射の影響によって、時間とともに自然に

ほぼマッチングが取れた状態になっていくが、入射直後のビーム損失を避けるためにはやはり入射時のマッチングは重要である。

4.3. 余分な磁場の影響

ここで、周上のある任意の短い場所（$s_0 \sim s_0 + ds$）で余分な磁場があり、粒子に余分な力が加わった場合の効果を考え、簡単な共鳴（resonance）現象についても述べる。

4.3.1. 2極成分の磁場

まず、余分が2極成分の磁場である場合を考える。この時、粒子はこの場所を通るたびに一定の角度変化を受けるはずであり、この角度をθとする。

s_0 で (x_0, x_0') であった粒子が1周した後の (x_1, x_1') を考えると、$s_0 \to s_0 + ds$ では、

$$\begin{aligned} x_0 &\to x_0 \\ x_0' &\to x_0' + \theta \end{aligned} \tag{4-36}$$

ds は微小であるとして、$s_0 + ds \to L + s_0$ では（L は周長）元の1周の輸送行列を掛け、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi + \alpha\sin\varphi & \beta\sin\varphi \\ -\dfrac{1+\alpha^2}{\beta}\sin\varphi & \cos\varphi - \alpha\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' + \theta \end{pmatrix} \tag{4-37}$$

となる。（$\beta(s_0)$、$\alpha(s_0)$ を単にβ、α と書いた。）

$(x_0, x_0') = (0,0)$ のとき (x_0, x_0') と (x_1, x_1') は等しくならないので、(0,0) は閉軌道でなくなる。すなわち、余分な2極成分の磁場は閉軌道を変化させる。

$(x_0, x_0') = (x_1, x_1')$ と式(4-37)から、閉軌道のずれとして、

$$\begin{aligned} \Delta x(s_0) &= \frac{\beta(s_0)\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}\theta \\ \Delta x'(s_0) &= \frac{-1+\cos\varphi - \alpha(s_0)\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}\theta \end{aligned} \tag{4-38}$$

が得られる。又、これと式(4-13)から任意の s での Δx 、$\Delta x'$ も計算できる。

φ が 2π の整数倍の場合、すなわち、チューンが整数のとき、式(4-38)の分母はゼロとなり、閉軌道のずれは発散する。チューンが整数であれば、周回のたびに毎回同じ位相で余分の角度変化を被るので、振動の振幅がどんどん大きくなっていくのは当然である。これは、最も単純な共鳴現象と考えることができる。

4.3.2. 4極成分の磁場

次に、余分の磁場が4極成分の場合を考える。

s_0 で余分の4極磁場 K があるとすると、$s_0 \to s_0 + ds$ の輸送行列は、

$$M(s_0 + ds, s_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K & 1 \end{pmatrix} \tag{4-39}$$

である。従ってリング1周の輸送行列は、

$$\begin{aligned} &M(s_0 + L, s_0) = \\ &\begin{pmatrix} \cos\varphi + \alpha\sin\varphi & \beta\sin\varphi \\ -\dfrac{1+\alpha^2}{\beta}\sin\varphi & \cos\varphi - \alpha\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K & 1 \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} \cos\varphi + \alpha\sin\varphi + K\beta\sin\varphi & \beta\sin\varphi \\ -\dfrac{1+\alpha^2}{\beta}\sin\varphi + K(\cos\varphi - \alpha\sin\varphi) & \cos\varphi - \alpha\sin\varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4-40}$$

これはリング1周の輸送行列だから、修正されたパラメータ$\tilde{\varphi}$、$\tilde{\alpha}$、$\tilde{\beta}$を使って

$$\begin{aligned} &M(s_0 + L, s_0) = \\ &\begin{pmatrix} \cos\tilde{\varphi} + \tilde{\alpha}\sin\tilde{\varphi} & \tilde{\beta}\sin\tilde{\varphi} \\ -\dfrac{1+\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}}\sin\tilde{\varphi} & \cos\tilde{\varphi} - \tilde{\alpha}\sin\tilde{\varphi} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4-41}$$

という形にかけるはずである。

式(4-40)と(4-41)の対角和を比べることにより、

$$\frac{1}{2}Tr[M] = \cos\varphi + \frac{1}{2}K\beta\sin\varphi = \cos\tilde{\varphi} \tag{4-42}$$

とのように１周当たりの位相の進みが変化することがわかる。$\Delta K\beta$ が小さいときは、

$$\tilde{\varphi} - \varphi \approx \frac{1}{2} K\beta \tag{4-43}$$

で、チューンの変化で書くと、

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{4\pi} K\beta \tag{4-44}$$

となる。

ここで、振動が安定となる条件は、式(4-20)から、

$$\left|2\cos\tilde{\varphi}\right| = \left|2\cos\varphi + K\beta\sin\varphi\right| \le 2 \tag{4-45}$$

であるが、負でないパラメータ Δ

$$\Delta \equiv \arctan\left(\frac{K\beta}{2}\right) \tag{4-46}$$

を定義すると、この条件は、

$$\left|\cos(2\pi\nu - \Delta)\right| < \cos\Delta \tag{4-47}$$

となり、ν が整数または半整数に近い場合には絶対値の小さな $K\beta$ でも不安定になる可能性がある。

初めにわずかでも振動があれば、チューンが整数の場合、周回のたびに毎回同じ位相で同じ方向に角度変化を被るので、振動の振幅がどんどん大きくなっていく。又、チューンが半整数であれば、周回毎に反対の位相で反対方向に角度変化を被り、結果として毎回振動の振幅が大きくなっていく。これが、半整数チューンの場合の共鳴である。

4.3.3.　skew　４極磁場

リングの一箇所に skew４極磁場がある場合の共鳴現象について定性的に考察してみる。skew４極磁場は水平方向(x)と垂直方向(y)の運動のカップリングを生むので、両方向の運動を考える必要がある。

まず、初めに水平方向の大きな振動があるが垂直方向には振動がないとし、短い（thin lens）skew４極磁場によって垂直方向の振動がどのように励起されるかを見る。

とりあえず、水平方向の振動は変化しないものとし、まず、skew４極磁場のある場所での x 方向の位置を周回回数 n の関数として、

$$x_n = A\cos(2\pi\nu_x n) \tag{4-48}$$

と書く。周回 n の瞬間に skew４極磁場によって垂直方向に受ける角度変化は、

$$\Delta y'_n = k_s x_n \tag{4-49}$$

であり、これによって引き起こされる振動によるその後の周回での垂直方向の位置変化は、

$$\begin{aligned}\Delta y_N &= \Delta y'_n \sin(2\pi\nu_y(N-n)) \\ &= Ak_s\cos(2\pi\nu_x n)\sin(2\pi\nu_y(N-n))\end{aligned} \tag{4-50}$$

のように書けるであろう。実際の振動は、以前の全ての周回で受けた角度変化の影響を足し合わせたものであるから、

$$\begin{aligned}y_N &= k_s\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin(2\pi\nu_y(N-n)) \\ &= Ak_s\sum_{n=0}^{N-1}\cos(2\pi\nu_x n)\sin(2\pi\nu_y(N-n))\end{aligned} \tag{4-51}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}&\cos(2\pi\nu_x n)\sin(2\pi\nu_y(N-n)) \\ &= \frac{1}{2}\Big\{\sin\big[2\pi(\nu_y N + (\nu_x - \nu_y)n)\big] \\ &\quad + \sin\big[2\pi(\nu_y N - (\nu_x + \nu_y)n)\big]\Big\}\end{aligned} \tag{4-52}$$

であるから、n について多数の和を取ったときにこれが大きくなるのは、

$(\nu_x + \nu_y)$ 又は、$(\nu_x - \nu_y)$ が整数に近い場合

$$(\nu_x \pm \nu_y) \approx \text{integer} \tag{4-53}$$

のみであり、その時、

$$y_N \approx \frac{Ak_s N}{2}\sin(2\pi\nu_y N) \tag{4-54}$$

と書けることがわかる。

$(\nu_x+\nu_y)$ が整数に近い場合を sum resonance, $(\nu_x-\nu_y)$ が整数に近い場合を difference resonance と呼ぶ。
ここまで x 方向の振動は一定としてきたが、実際には y 方向の振動は x 方向の振動に影響を及ぼす。resonance の条件の場合にどうなるかを見る。周回 n の時点で skew 4 極磁場によって水平方向に受ける角度変化は、

$$\Delta x'_n = k_s y_n \approx k_s \frac{Ak_s n}{2}\sin(2\pi\nu_y n) \tag{4-56}$$

であり、それによって引き起こされる振動により、その後の周回での位置の変化は、

$$\begin{aligned}\Delta x_{n+m} &= \Delta x'_n \sin(2\pi\nu_x m)\\ &= \frac{Ak_s^2 n}{2}\sin(2\pi\nu_y n)\sin(2\pi\nu_x m)\end{aligned} \tag{4-57}$$

と書ける。これを以前のすべての周回について足し合わせ、元々の振動（式(4-48)）を加えると、

$$\begin{aligned}x_N &\approx A\cos(2\pi\nu_x N)\\ &\quad+\frac{Ak_s^2}{2}\sum_{n=0}^{N-1} n\sin(2\pi\nu_y n)\sin(2\pi\nu_x(N-n))\\ &= A\cos(2\pi\nu_x N)\\ &\quad+\frac{Ak_s^2}{4}\sum_{n=0}^{N-1} n\{\cos[2\pi\nu_x N-2\pi n(\nu_x+\nu_y)n]\\ &\qquad-\cos[2\pi\nu_x N+2\pi(\nu_x-\nu_y)n]\}\end{aligned} \tag{4-58}$$

となる。これは、$(\nu_x+\nu_y)$ が整数（sum resonance）の場合、

$$x_N \approx A\cos(2\pi\nu_x N)\left[1+\frac{k_s^2}{4}\frac{N(N-1)}{2}\right] \tag{4-59}$$

$(\nu_x-\nu_y)$ が整数（difference resonance）の場合、

$$x_N \approx A\cos(2\pi\nu_x N)\left[1-\frac{k_s^2}{4}\frac{N(N-1)}{2}\right] \tag{4-60}$$

となる。
以上のことから、sum resonance の場合には y 方向の振幅が大きくなるに従って x 方向の振幅もさらに大きくなっていき、運動が発散してしまうことがわかる。一方、difference resonance の場合には y 方向の振幅が大きくなるに従って x 方向の振幅は小さくなっていく。より詳しい議論は省略するが、この場合には振幅が x 方向と y 方向の間で交互に大きくなったり小さくなったりするような運動となり、発散することはない。

4.4. 弱収束と強収束

ここでは、円形加速器の２種類のビーム光学の例を述べる。

4.4.1. 弱収束

まず、全周に渡って磁場が一様の場合を考えよう。全ての s で磁場が垂直方向のみで一定、すなわち、$B_x=0$、$B_y=\mathrm{constant}$ であるとすると、これは偏向角度 360 度の２極磁石であり、3.2.3 節の議論から、角度 θ 分の水平方向の輸送行列は

$$M_{x,\theta}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \rho_0\sin\theta\\ \dfrac{-1}{\rho_0}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{4-61}$$

と書けるが、これと輸送行列をベータ関数、アルファ関数、位相の進みで表した式(4-13) と比べることにより、場所によらず

$$\begin{aligned}\beta_x &= \rho_0\\ \alpha_x &= 0\end{aligned} \tag{4-62}$$

であることがわかる。また、位相の進みは

$$\psi_x=\theta \tag{4-63}$$

であり、チューンは

$$\nu_x=1 \tag{4-64}$$

となる。
上の例の場合、垂直方向には収束力がないので安定ではない。そこで、一様な垂直方向の収束力を加えることを考える。２極磁場だけでなく４極磁場の成分を付け加えれば良いが、垂直方向の収束力のためには同じ強さの水平方向の発散力が発生する（3.2.4 節参照）。従って、２極磁場による収束力を超えないような水平方向の発散力まで

は許され、同じ強さの垂直方向の収束力を得ることができる。すなわち、あらゆる場所で一様な4極磁場による発散（収束）

$$K=\frac{a}{\rho_0^2},\ (0<a<1) \tag{4-65}$$

を導入することにより、運動方程式は

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{x}{\rho_0^2}+Kx=-\frac{(1-a)x}{\rho_0^2} \tag{4-66}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=-Ky=-\frac{ay}{\rho_0^2} \tag{4-67}$$

となり、両方向で収束とできる。
この場合、角度θ分の水平方向の輸送行列は

$$M_{x,\theta}=\begin{pmatrix}\cos\left(\sqrt{1-a}\theta\right) & \frac{\rho_0}{\sqrt{1-a}}\sin\left(\sqrt{1-a}\theta\right)\\ \frac{-\sqrt{1-a}}{\rho_0}\sin\left(\sqrt{1-a}\theta\right) & \cos\left(\sqrt{1-a}\theta\right)\end{pmatrix} \tag{4-68}$$

垂直方向の輸送行列は

$$M_{y,\theta}=\begin{pmatrix}\cos\left(\sqrt{a}\theta\right) & \frac{\rho_0}{\sqrt{a}}\sin\left(\sqrt{a}\theta\right)\\ -\frac{\sqrt{a}}{\rho_0}\sin\left(\sqrt{a}\theta\right) & \cos\left(\sqrt{a}\theta\right)\end{pmatrix} \tag{4-69}$$

となるので、

$$\beta_x=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-a}},\quad \alpha_x=0 \tag{4-70}$$

$$\nu_x=\sqrt{1-a} \tag{4-71}$$

$$\beta_y=\frac{\rho_0}{\sqrt{a}},\quad \alpha_y=0 \tag{4-72}$$

$$\nu_y=\sqrt{a}\,\theta \tag{4-73}$$

となることがわかる。
このように、全周に渡って水平垂直両方向に（ほぼ）一様な弱い収束力を持たせるようなビーム光学設計を「弱収束（weak focusing)」と呼ぶ。
弱収束の場合、ベータ関数がリングの半径より必ず大きいので、加速器が大きくなるとベータ関数が大きくなり、従って横方向のビームの大きさも（同じエミッタンスに対して）大きくなる。すると、磁石の磁極の間を大きくしなければならず、巨大な磁石（電磁石の場合は巨大な電源も）が必要になる。このため、高エネルギーの加速器では弱収束は使われず、次に述べる「強収束（strong focusing)」が使われる。

4.4.2. 強収束の例

強収束のアイデアを簡単に言えば、「収束と発散とを組み合わせることにより全体としてビーム安定にできる」ということであろう。
ここでは、強収束の簡単な例として thin lens 近似で FODO の繰り返しの場合を見てみる。F は focus、D は defocus を表し、O は何もない空間(drift space）を表す。Fig. 6 のような配置である。ここで$k_{1,2}$は4極磁場による収束（発散）の強さ、$d_{1,2}$は磁石間の空間の長さである。

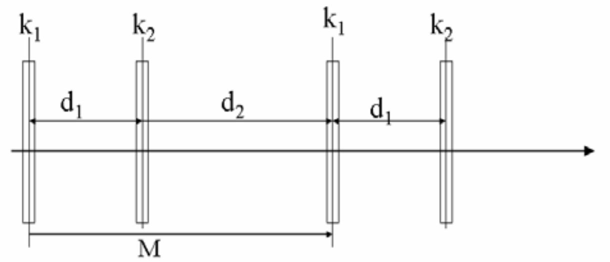

Fig. 6 Thin lens FODO

以下、２極磁場による曲率からの収束は４極磁場による収束発散に比べて十分小さいとして無視する。
強さk_1の４極磁石の中心（長さの半分）から次の強さk_1の４極磁石の中心までの輸送行列は、水平、垂直方向各々について、thin lens 近似により

$$M_{x,1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{k_1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & d_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ k_2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & d_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{k_1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

$$M_{y,1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{k_1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & d_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -k_2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & d_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{k_1}{2} & 1\end{pmatrix} \tag{4-74}$$

となる。
リング全周がこの同じ要素の繰り返しで出来ているとしよう。このような繰り返しの単位をセル(cell) と呼んでいる。
リング全周の輸送行列は $M_{x(y),1}$ をセルの数だけ掛けたものであるから、安定条件として $|Tr(M)|\le 2$ が得られる（4.2.3 節を参照)。具体的に書くと

$$\begin{aligned}&|2+(k_1+k_2)(d_1+d_2)+k_1k_2d_1d_2|\le 2\\ &|2-(k_1+k_2)(d_1+d_2)+k_1k_2d_1d_2|\le 2\end{aligned} \tag{4-75}$$

である。
特に、磁石間の距離が全て等しい（$d_1=d_2=d$）場合の安定条件を考えてみよう。まず、$k_1k_2\le 0$ でなければ２つの不等式を同時に満たせないのは明らかであり、$k_1\ge 0$ 、$k_2\le 0$ の場合だけ考えても一般性は失われない。さらに２式を変形して、

$$\begin{aligned}&0\le -(k_1d/2+1)(-k_2d/2-1)\le 1\\ &0\le -(k_1d/2-1)(-k_2d/2+1)\le 1\end{aligned} \tag{4-76}$$

が得られ、これから

$$\begin{aligned}&k_1d/2<1\\ &-k_2d/2<1\\ &(k_1d/2-1)(-k_2d/2+1)\le 1\\ &(k_1d/2+1)(-k_2d/2-1)\le 1\end{aligned} \tag{4-77}$$

となる。これらの境界線を $(k_1d/2,\ -k_2d/2)$ でプロットしたのが Fig. 7 である。安定な領域の形は「ネクタイ」と呼ばれている。
次に、ベータ、アルファ関数を考える。対称な場所のベータ、アルファ関数は同じはずであり、これらは、式(4-13)から、

$$M_1=\begin{pmatrix}\cos\mu+\alpha_1\sin\mu & \beta_1\sin\mu\\ -\frac{1+\alpha_1^2}{\beta_1}\sin\mu & \cos\mu-\alpha_1\sin\mu\end{pmatrix} \tag{4-78}$$

と書けるはずで（x, y の添字は省略)、これから、ベータ、アルファ関数を計算することができる。ここで、μ はセル当たりの位相の進みである。

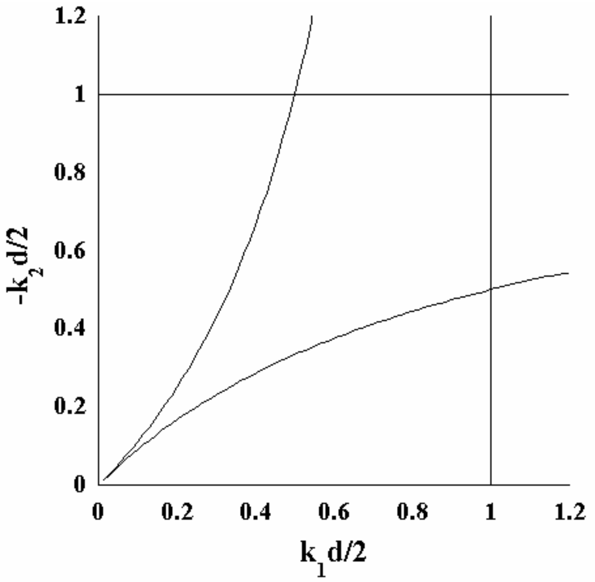

Fig. 7　「ネクタイ」形状の安定領域

$d_1=d_2=d$ 、$k_1=-k_2=k>0$ の特別な場合には、簡単に計算できて、

$$\beta_1=\frac{2}{k}\sqrt{\frac{(1-kd/2)}{(1+kd/2)}} \tag{4-79}$$

$$\beta_2=\frac{2}{k}\sqrt{\frac{(1+kd/2)}{(1-kd/2)}} \tag{4-80}$$

である。
このとき、安定条件は、$kd/2<1$ であるから、大雑把には、ベータ関数は磁石間の距離（d）程度になることがわかる。加速器全体の長さが長くなっても、磁石間の距離は短く出来るので、周長が長い場合には弱収束の場合（ベータ関数はリングの半径より大）と比べて強収束の方がはるかにベータ関数を小さくでき、従ってビームの大きさも小さくできることがわかる。

5. 縦方向の運動

前節では粒子の進行方向の運動量は不変であるとしたが、ここでは運動量（エネルギー）の変化を考える。横方向の振動はないとする。

5.1. momentum compaction

先に述べたように、閉軌道は粒子の運動量（エネルギー）に依存するので運動量の異なる粒子は異なる軌道を通る。そのため、リングを 1 周するのに要する時間も運動量に依存する。この時間（T）が運動量のずれによって変化する割合、

$$\eta_c = \frac{1}{T_0}\left(\frac{dT}{d\delta}\right)_{\delta=0} \tag{5-1}$$

を「momentum compaction factor」と呼ぶ（なぜこのように呼ばれるのかはよくわからない）。
ここで、運動量の相対的なずれを

$$\delta \equiv (p - p_0)/p_0 \tag{5-2}$$

とした（p が粒子の運動量、p_0 は設計運動量）。T_0 は $\delta = 0$ での 1 周の時間 T である。
設計値からの運動量のずれが小さい場合、

$$\frac{T - T_0}{T_0} \approx \eta_c \delta \tag{5-3}$$

である。
T の変化には、軌道の長さの変化の効果と、粒子の速さの変化の効果の両方が寄与する。
δ に対する周長を $C(\delta)$ と書いたとき、

$$\alpha_c = \frac{1}{C(0)}\left(\frac{dC}{d\delta}\right)_{\delta=0} \tag{5-4}$$

というパラメータを導入すると、粒子の速さは

$$v = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}} \tag{5-5}$$

で、さらに、

$$T = C/v \tag{5-6}$$

なので、これらから、

$$\eta_c = \alpha_c - \gamma^{-2} \tag{5-7}$$

であることがわかる。ここで、$\gamma \equiv E/mc^2$ （m は粒子の質量）。
高エネルギーの電子加速器では、γ^{-2} が非常に小さいので、無視することができる。しかし、エネルギーのあまり高くない陽子（またはより重い粒子の）加速器の場合には無視できない。
運動量のより高い粒子は一定磁場での曲率半径がより大きいので、閉軌道はリングの外側に膨れていく傾向がある。従って、非常に特殊な場合を除いて α_c は正であり、高エネルギーのリング加速器では、η_c も正である。
ここでは詳しく述べないが、陽子（またはより重い粒子の）を円形加速器で加速していく場合、エネルギーの低いときは η_c が負であるが、エネルギーが高くなると η_c が正に変わる。その過程で、ちょうど $\eta_c = 0$ のところ（transition）では不安定な運動が起きやすくなるため、特別な配慮が必要になる。
以下では、簡単のため、γ が非常に大きく、また、$\eta_c = \alpha_c > 0$ として話を進める。そうでない場合でも話の筋道は本質的には変わらない。

5.2. 高周波による加速

ほとんどの高エネルギーの加速器は、高周波加速空洞によって粒子を加速している。エネルギーが一定であっても、電子の場合はシンクロトロン放射によって失われるエネルギーの分を補わなければならない。陽子の場合も、エネルギーや進行方向の分布をコントロールするために高周波加速空洞が使われる。
粒子は加速空洞を通過する度にエネルギー（E）に変化を受ける。n 周目では、

$$E \to E + eV\sin(\omega(nT_0 + t) + \psi_0) \tag{5-8}$$

となり、V は加速電圧のピーク値、ω は周波数。ψ_0 は基準となる位相である。(t, E) を粒子の運動を表すパラメータと考えることができる。簡単のため、加速空洞はリングに 1 箇所しかないとする。

ここで、何回周回してきても常に同じ(t,E)となるような粒子を考える。（横方向の運動で、閉軌道を考えたことに対応する。）このような粒子を基準として採用すべきであるから、$(t=0, E=E_0)$とする（E_0は基準エネルギーを表す）。

エネルギーが全ての周回で同じであるためには、シンクロトロン放射による１周当たりのエネルギー損失をU_0として、$eV\sin(\omega nT_0+\psi_0)=U_0$ が全てのnについて成り立つ必要がある。故に、hを整数として、

$$\omega T_0 = 2\pi h \tag{5-9}$$

$$eV\sin\psi_0 = U_0 \tag{5-10}$$

という条件が得られる。

第１式は、基準粒子がリングを１周する時間が加速空洞の高周波の周期の整数倍になっていなければならないことを意味する。この整数hを「harmonic number」と言う。

第２式は、基準となる時刻に通過する粒子は加速空洞から毎回放射によるエネルギー損失と同じエネルギーを得ることを意味する。（シンクロトロン放射によるエネルギー損失がない場合には、$U_0=0$）

5.3. シンクロトロン振動

運動をt（粒子が遅れる方向を正の向きとする）と、（γ が非常に大きいとして）$\delta=(p-p_0)/p_0=(E-E_0)/E_0$で記述することにする。これらは微小であると仮定して、１次の項のみとり、また、リング１周では大きく変化しないとする。周回数をnとすると、式(5-8)、(5-10) から、

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{dn} &= \frac{eV}{E_0}\sin(\omega t+\psi_0)-\frac{U_0}{E_0}\\ &= \frac{eV}{E_0}\left[\sin(\omega t)\cos\psi_0+\cos(\omega t)\sin\psi_0\right]-\frac{U_0}{E_0} \\ &\approx \frac{eV\omega\cos\psi_0}{E_0}t\end{aligned} \tag{5-11}$$

となる。ここで、tが微小であるという仮定を使った（$|\omega t|<<1$）。又、ここではU_0 は一定であるとした（この仮定は後の節では修正される）。

一方、式(5-3) から、

$$\frac{dt}{dn}\approx T_0\eta_c\delta \tag{5-12}$$

である。

これら２つの式は、$eV\omega\eta_c\cos\psi_0<0$の場合、調和振動の形を与えることがすぐにわかる。すなわち、

$$\Omega^2 = -\frac{eVT_0\omega\eta_c\cos\psi_0}{E_0} \tag{5-13}$$

として、

$$\frac{d^2t}{dn^2}=-\Omega^2 t,\quad \frac{d^2\delta}{dn^2}=-\Omega^2\delta \tag{5-14}$$

である。

一方、$eV\omega\eta_c\cos\psi_0>0$の場合には、指数関数的に発散する解を持ち、運動は不安定となる。

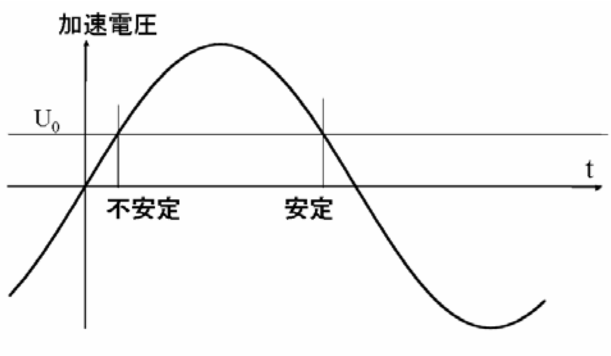

Fig. 8 高周波による加速のｔ依存の様子

式 (5-10)を満たす位相には、異なる傾きを与える２つの解があるが、そのうちの１つは安定、もう１つは不安定な運動に対応するわけである。（先に述べた「transition」の瞬間には、安定な位相だったものが突然不安定な位相になってしまう。）

当然、$eV\omega\eta_c\cos\psi_0<0$ として安定になるようにしなければならない。この時、粒子の運動は周波数$\Omega/2\pi$での調和振動になる。このような振動を

「シンクロトロン振動」と言う。ただし、Ω は周回数に対して定義されている、「リング１周の間の振動の位相の進み」であり、無次元の量である。これを時間当りの周波数に直すには、１周の時間、T_0 で割ればよい。
δ の振幅（A_δ と書く）と t の振幅（A_t と書く）には、式(5-12)から、

$$\Omega A_t = T_0 \eta_c A_\delta \tag{5-15}$$

式(5-11)から、

$$\Omega A_\delta = \frac{eV\omega\cos\psi_0}{E_0} A_t \tag{5-16}$$

の関係があり、結局、

$$A_t = \sqrt{\frac{-T_0\eta_c E_0}{eVT_0\omega\cos\psi_0}} A_\delta \tag{5-17}$$

という関係があることがわかる。また、s での δ と t は、Φ を初期状態で決まる定数として、

$$\begin{aligned} \delta &= A_\delta \cos\left(\Omega s / cT_0 + \Phi\right) \\ t &= A_\delta \frac{T_0\eta_c}{\Omega} \sin\left(\Omega s / cT_0 + \Phi\right) \end{aligned} \tag{5-18}$$

と表すことができ、

$$A_\delta^2 = \delta^2 + \left(\frac{\Omega}{T_0\eta_c}\right)^2 t^2 \tag{5-19}$$

である。
横方向の場合と同様に、ビーム内の多数の粒子を考えるとき、振幅と位相に相関関係がない状態を「マッチング」がとれていると言う。この状態では、

$$\left\langle \delta^2 \right\rangle = \left\langle A_\delta^2 \right\rangle \Big/ 2 \tag{5-20}$$

$$\left\langle t^2 \right\rangle = \frac{-T_0\eta_c E_0}{eV\omega\cos\psi_0} \left\langle A_\delta^2 \right\rangle \Big/ 2 \tag{5-21}$$

が成り立つが、マッチングが取れていない状態では、$\left\langle \delta^2 \right\rangle$ と $\left\langle t^2 \right\rangle$ の大きさが交互に大きくなったり小さくなったりする。つまり、マッチングが取れていないと、エネルギーの広がりと（バンチ構造がある場合）バンチの長さが振動する。
進行方向のエミッタンスを、

$$\varepsilon_z \equiv \sqrt{\left\langle (ct)^2 \right\rangle \left\langle \delta^2 \right\rangle - \left\langle ct\delta \right\rangle^2} \tag{5-22}$$

と定義すると、マッチングがとれているいないにかかわらず振動の位相に依存せず、これは（各粒子の振幅が変化しなければ）保存する。
特に、マッチングがとれていれば、

$$\varepsilon_z = c\sqrt{\frac{-T_0\eta_c E_0}{eV\omega\cos\psi_0}} \left\langle A_\delta^2 \right\rangle \Big/ 2 \tag{5-23}$$

である。

6. dispersion と chromaticity

前節ではシンクロトロン振動という粒子のエネルギーの変化につい調べたが、普通は $\Omega T_0 << 1$ であり、粒子が何周かする間のシンクロトロン振動によるエネルギー変化は無視することができる。ここでは、エネルギー設計値からがずれている粒子の運動について重要なパラメータを紹介する。

6.1. dispersion

先に閉軌道というものを考えたが、これはビーム粒子のエネルギーに依存する。例えば、普通の加速器では、エネルギーが設計値よりも高い粒子は設計軌道よりも外側を通るような閉軌道を持つ。
エネルギーのずれを $\delta = (E - E_0)/E_0$ とし、$x_C(\delta, s)$、$y_C(\delta, s)$ をエネルギーのずれ δ を持つビームの閉軌道として、各場所 s での「ディスパージョン (dispersion)」を、以下のように定義する。

$$\eta_x(s) \equiv \frac{dx_C(\delta, s)}{d\delta} \tag{6-1}$$

$$\eta_y(s) \equiv \frac{dy_C(\delta, s)}{d\delta} \tag{6-2}$$

又、角度ディスパージョン(angular dispersion)も同様に、

$$\eta'_x(s) \equiv \frac{dx'_C(\delta,s)}{d\delta} \tag{6-3}$$

$$\eta'_y(s) \equiv \frac{dy'_C(\delta,s)}{d\delta} \tag{6-4}$$

とする。

軌道が完全に水平面内にあれば、η_y、η'_y は何処でもゼロである。逆に、水平面内で軌道が曲がっていれば、η_x、η'_x がゼロでない場所が必ずある。また、δ が小さい場合、

$$x_C(\delta,s) \approx x_C(0,s) + \eta_x(s)\delta \tag{6-5}$$

で、さらに、$x_C(0,s)$ を基準軌道としてこれからのずれを x とするとき、x をエネルギーのずれによる部分とベータトロン振動の部分（$x_\beta(s)$）に分けて、

$$x(s) = \eta_x(s)\delta + x_\beta(s) \tag{6-6}$$

のように書くことができる。

6.2. chromaticity

クロマティシティ(chromaticity)とは、チューンのエネルギーのずれに対する依存性のことであり、

$$\xi_{x,y} \equiv \frac{d\nu_{x,y}(\delta)}{d\delta} \tag{6-7}$$

と定義する。$\nu_{x,y}(\delta)$ はエネルギーが δ ずれた粒子のチューンである。

もしも磁場が２極成分と４極成分だけだとすると、エネルギーが δ ずれた粒子に対してすべての収束力が $(1+\delta)^{-1}$ だけ弱くなることになり、チューンは小さくなる。従ってこの場合、クロマティシティは負になり、絶対値は大きく、ほぼチューンと同じになるであろう（$\xi_{x,y} \sim -\nu_{x,y}$）。

クロマティシティがあまり大きいと、ビーム内の粒子のエネルギーの広がりによって、チューンに大きな幅ができる。結果として、共鳴を引き起こしたり、マッチングを取ることが困難になったりして、ビームが失われることもある。

クロマティシティを制御するためにディスパージョンのある場所に６極磁石が置かれる。式(3-31)(6-6) より、x_β と y の１次までとって、

$$\begin{aligned}\frac{dx'}{ds} &= \frac{ea_3}{p_0}\left((\eta_x\delta + x_\beta)^2 - y^2\right) \\ &\approx \frac{ea_3}{p_0}(\eta_x\delta)^2 + 2\frac{ea_3}{p_0}\eta_x\delta x_\beta\end{aligned} \tag{6-8}$$

となるが、ベータトロン振動のみに注目すると、

$$\frac{dx'_\beta}{ds} = -\frac{2ea_3}{p_0}\eta_x\delta x_\beta \tag{6-9}$$

となり、エネルギーのずれに比例した線形の収束力が得られる。y 方向についても、

$$\frac{dy'}{ds} = \frac{2ea_3}{p_0}\eta_x\delta y \tag{6-10}$$

となり、x 方向と比べて収束の絶対値は同じだが符号が逆である。

６極磁石がない場合クロマティシティは負なので、これを補正するためには、エネルギーが高いほど６極磁石での収束を強くしたい。つまり、$ea_3\eta_x$ が x 方向については正、y 方向については負でなければならないので、１個の６極磁石では両方は補正できない。

多くの場合、６極磁石を $ea_3 > 0$ と $ea_3 < 0$ の２種類用意し、両者とも $\eta_x > 0$ の場所に置くが、$ea_3 > 0$ のものは β_x が大きく β_y が小さい場所に置く。$ea_3 < 0$ のものは β_x が小さく β_y が大きい場所に置く。式(4-44)から、余分の収束力、発散力のチューンへの寄与はその場所での β に比例するので、x 方向、y 方向共にクロマティシティを正の方向に補正できることがわかる。

7. シンクロトロン放射の影響

7.1. シンクロトロン放射の性質

荷電粒子が加速度運動をすると電磁波が放出される。特に、磁場によってビームが曲げられるときに出る電磁波をシンクロトロン放射と言う。シンクロトロン放射は、高エネルギーの電子（陽電

子）加速器の場合に重要な現象であるので、以下では超相対論的な電子ビームを仮定して話を進める。ここでは以下で使用するための重要な性質をまとめておく。式の導出など、詳しいことは適当な教科書を読んでもらうことにして、結果のみを書く。
荷電粒子がその進行方向と垂直な磁場の中を進むと、進行方向に電磁波を放射し、エネルギーを失う。１粒子が単位時間当たりに放出する、エネルギーが u と $u+du$ の間にある光子の個数の期待値を $n(u)du$ と書こう。単位時間当たりに放出する全光子数の期待値は、

$$\mathcal{N}=\int_0^\infty n(u)du \tag{7-1}$$

単位時間当たりに放出する全光子のエネルギーの期待値は

$$P_\gamma=\int_0^\infty un(u)du \tag{7-2}$$

１光子のエネルギーの平均は

$$\bar{u}=\frac{\int_0^\infty un(u)du}{\int_0^\infty n(u)du}=\frac{P_\gamma}{\mathcal{N}} \tag{7-3}$$

１光子のエネルギーの２乗の平均は

$$\overline{u^2}=\frac{\int_0^\infty u^2n(u)du}{\int_0^\infty n(u)du} \tag{7-4}$$

などと書ける。この節では、光子についての平均を上バー（‾）で表す。
以下、結果のみ書く。粒子のエネルギーを E（$\gamma=E/mc^2$）、磁場中での軌道の曲率半径を ρ をとして、まず、「critical energy」と呼ばれる

$$u_c=\frac{3}{2}\frac{\hbar c\gamma^3}{\rho} \tag{7-5}$$

を定義すると、無次元の関数、

$$S(x)=\frac{9\sqrt{3}}{8\pi}x\int_x^\infty K_{5/3}(y)dy \tag{7-6}$$

を使って、

$$n(u)du=\frac{8}{27}\frac{r_emc}{\hbar^2}\gamma^{-2}\frac{u_c}{u}S\left(\frac{u}{u_c}\right) \tag{7-7}$$

と書ける。ただし、r_e は電子古典半径、$K_{5/3}$ は変形ベッセル関数（modified Bessel function）である。

$$\int_0^\infty S(x)dx=1 \tag{7-8}$$

であることから、

$$\begin{aligned}P_\gamma&=\int_0^\infty un(u)du=u_c^2\int_0^\infty xn(u_cx)dx\\&=u_c^2\frac{8}{27}\frac{r_emc}{\hbar^2}\gamma^{-2}=\frac{2r_emc^3}{3}\frac{\gamma^4}{\rho^2}\end{aligned} \tag{7-9}$$

となることがわかる。これは、磁場の強さを B として、

$$P_\gamma=\frac{2r_ee^2c^3}{3(mc^2)^3}E^2B^2 \tag{7-10}$$

とも書ける。
さらに、

$$\mathcal{N}=\frac{15\sqrt{3}}{8}\frac{P_\gamma}{u_c} \tag{7-11}$$

$$\bar{u}=\frac{8}{15\sqrt{3}}u_c \tag{7-12}$$

$$\overline{u^2}=\frac{11}{27}u_c^2 \tag{7-13}$$

などとなる。
u_c がゼロでなく有限であり、$\mathcal{N}$ が無限大にならないのは量子力学的な効果（$\hbar$ がゼロでないことの効果）である。このため後で見るように、粒子のエネルギーのばらつきが引き起こされる。
上ではエネルギーの変化のみ考え、粒子の方向の変化は考えなかった。古典力学に従えば放射は進行方向に対して対称に出る、すなわち粒子は放射によって方向が全く変わらないが、実際には量子

論的効果により放射される光子は$1/\gamma$ラジアン程度の角度の広がりを持ち、その結果粒子の方向がデタラメに変わる。ただし、この角度の広がりの効果はほとんどの場合に無視できるため、以下ではこの効果を定量的に取り扱うことはしない。

7.2. 放射減衰

7.2.1. 大雑把な話

シンクロトロン放射によって、ベータトロン振動、シンクロトロン振動が減衰する。ここでは、大雑把な話から、なぜ放射によって振動の減衰が起こるかを説明する。
シンクロトロン振動の説明のところでは、1周当たりの放射によるエネルギーが定数U_0であると仮定した。しかし、実際にはそうではない。単位時間に放射によって失うエネルギー（放射のパワー）P_γは、E^2B^2に比例するから、1周当たりのエネルギー損失は大雑把にE^2に比例する。従って、

$$U = U_0(E/E_0)^2 = U_0(1+\delta)^2 \approx U_0 + 2U_0\delta \qquad (7\text{-}14)$$

であり、式(5-11)、(5-14)は、

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{dn} &= \frac{eV}{E_0}\sin(\omega t + \psi_0) - \frac{U}{E_0}\\ &\approx \frac{eVT_0\omega\cos\psi_0}{E_0}t - 2\frac{U_0}{E_0}\delta\end{aligned} \qquad (7\text{-}15)$$

$$\frac{d^2\delta}{dn^2} = -\Omega^2\delta - 2\frac{U_0}{E_0}\frac{d\delta}{dn} \qquad (7\text{-}16)$$

のように修正される。$U_0/E_0 << \Omega$の場合、c_1、c_2を定数として、一般解は

$$\delta = \left(c_1 e^{i\Omega n} + c_2 e^{-i\Omega n}\right)e^{-(U_0/E_0)n} \qquad (7\text{-}17)$$

となり、新たに加わった項が振動の減衰をもたらすことがわかる。減衰時間（damping time）は振幅が$1/e$になる時間と定義され、シンクロトロン振動の減衰時間は、

$$\tau_z \approx \frac{E_0T_0}{U_0} \qquad (7\text{-}18)$$

となる。
次に、横方向の振動の減衰であるが、ここではCourant -Snyder 不変量の変化を考える。
放射は進行方向に出るので、粒子の角度は変わらない。従って、放射の前後でx'、y'は変わらない。当然、位置x、yも変わらないので Courant -Snyder 不変量は変わらない（あくまでも大雑把な話である）。
一方、加速空洞のところで、粒子は放射で失った分のエネルギーをビーム軸方向（全ての粒子について、全ての周回について同じ）に補充される。つまり、横方向の運動量は変わらないが、ビーム軸方向の運動量のみが補充される。補充されるエネルギーはほぼU_0、ビームのエネルギーはE_0であるから、横方向の角度は、$E_0/(E_0+U_0)$倍になる（小さくなる。Fig. 9 を参照）。$U_0/E_0 << 1$として、$x' \to x' - (U_0/E_0)x'$　と書ける (y 方向も同じ)。
従って、Courant-Snyder 不変量の変化は、

$$\Delta a^2 = -2\frac{U_0}{E_0}\left(\alpha x x' + \beta x'^2\right) \qquad (7\text{-}19)$$

となる。

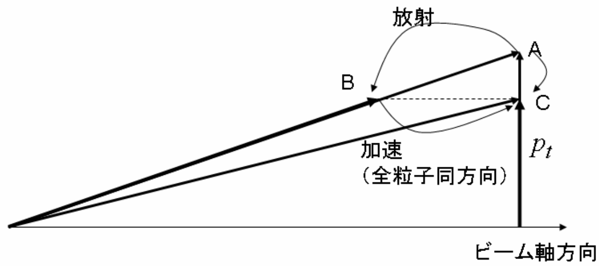

Fig. 9 横方向の運動の放射減衰の原理の説明。放射によって運動量が A→B、加速によって B→C と変化し、結果として横方向の運動量が減少する。

多数の周回についての平均をとると、式(4-26)により、

$$\left\langle \Delta a^2 \right\rangle = -\frac{U_0}{E_0}a^2 \qquad (7\text{-}20)$$

であることがわかり、

$$a^2 \sim e^{-(U_0/E_0)n} \tag{7-21}$$

のように減衰する。
Courant-Snyder 不変量の平方根が振動の振幅であるから、横方向の振動の振幅が$1/e$になる時間（damping time）は、

$$\tau_x \approx \tau_x \approx 2\frac{E_0 T_0}{U_0} \approx 2\tau_z \tag{7-22}$$

となる。
大雑把な見積では、横方向の振動の減衰時間は、縦方向の振動の減衰時間の２倍であることが分かった。

7.2.2. 少し細かい話

ここで、時間当りの（超相対論的ビームを仮定するので粒子の軌道長当りと言っても同じ）エネルギー損失が、E^2B^2に比例することを使ってもう少し詳しく話を進める。ただし、量子論的効果は考えず、又、設計上の偏向磁場がない場所でのBは小さいので、そのような場所での放射の効果は無視する。又、設計軌道は水平面内にあるとして、垂直方向のBだけ考え、また、Bは垂直方向の位置によらないとする。
ある場所sでの１粒子の状態を、(x,x',y,y',t,δ)と表し、sから$s+\Delta s$の微小な区間での放射を考える。このとき、設計軌道（基準軌道）$(x,x',y,y',t,\delta)=(0,0,0,0,0,0)$にある粒子の放射によるエネルギー損失を、$P_{\gamma 0}\Delta s/c$ と書こう。$P_{\gamma 0}$は基準となる粒子の時間あたりのエネルギー損失で、

$$P_{\gamma 0} = \frac{2r_e mc^3}{3}\frac{\gamma_0^4}{\rho_0^2} \tag{7-23}$$

である。ここで、ρ_0は基準軌道の曲率半径、γ_0は設計エネルギーのエネルギーファクターである。
時間あたりのエネルギー損失はE^2B^2に比例するので、

$P_\gamma = P_{\gamma 0}(1+\delta)^2 (B(x)/B(x=0))^2$

となるが、δとxは小さいとして１次までとり、

$$\begin{aligned} P_\gamma &\approx P_{\gamma 0}(1+\delta)^2\left(1+\frac{1}{B_0}\frac{dB}{dx}x\right)^2 \\ &\approx P_{\gamma 0}(1+2\delta+2\rho_0 Kx) \end{aligned} \tag{7-24}$$

となる。Kは磁場の変化率で、この項は複合型偏向磁石（combined function bending magnet）のように、偏向磁場と収束磁場が同じ場所にある場合に重要になる。
次に、粒子がΔs進むのにかかる時間は

$$\Delta T = \frac{\Delta s}{c}\left(1+\frac{x}{\rho_0}\right) \tag{7-24}$$

なので、（ここでも１次までとった）Δs進む間のエネルギー損失は、

$$\Delta E = P_{\gamma 0}\left(1+2\delta+2\rho_0 Kx+\frac{x}{\rho_0}\right)\frac{\Delta s}{c} \tag{7-25}$$

となる。
ここで、各方向の振動の放射による変化を考えるため、xを、式(6-6)の様に、$x=\eta\delta+x_\beta$ と分解すると、

$$\begin{aligned} &-\Delta E \\ &= P_{\gamma 0}\frac{\Delta s}{c}\left[1+\left(2+2\rho_0 K\eta+\frac{\eta}{\rho_0}\right)\delta+\left(2\rho_0 K+\frac{1}{\rho_0}\right)x_\beta\right] \\ &= \frac{\Delta s}{c}\left[P_{\gamma 0}(1+2\delta)+\frac{2r_e mc^3\gamma_0^4}{3}\left(2\frac{K}{\rho_0}+\frac{1}{\rho_0^3}\right)(\eta\delta+x_\beta)\right] \end{aligned} \tag{7-26}$$

となる。
まず、エネルギーのずれの変化を見る。リング１周当たりのエネルギー損失を計算するには、上の式を全周に渡って積分すればよい。x_βは振動するので、これを含む項は積分するとゼロになり、

$$U_0 = \int P_{\gamma 0}\frac{ds}{c} \tag{7-27}$$

なので、

$$U = U_0 + \left[2U_0 + \frac{2r_e mc^2 \gamma_0^4}{3} \int \left(2\frac{K}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0^3} \right) \eta \, ds \right] \delta$$

(7-28)

が得られる。
第２項がシンクロトロン振動の減衰を与える。「大雑把な話」で出てきたのは、括弧内の第１項だけである。減衰を与えるこの項は、

$$\frac{2r_e mc^2 \gamma_0^4}{3} \int \left(2\frac{1}{\rho_0^2} + 2\frac{K\eta}{\rho_0} + \frac{\eta}{\rho_0^3} \right) ds \, \delta \qquad (7\text{-}29)$$

とも書ける。
減衰時間の逆数を「（時間当りの）減衰率」と定義すると、減衰率は、「大雑把な話」での議論を参考に、

$$\frac{1}{\tau_z} = \frac{1}{E_0 T_0} \left[U_0 + \frac{2r_e mc^2 \gamma_0^4}{3} \int \left(\frac{K\eta}{\rho_0} + \frac{\eta}{2\rho_0^3} \right) ds \right]$$
$$= \frac{1}{E_0 T_0} \frac{2r_e mc^2 \gamma_0^4}{3} \int \left(\frac{1}{\rho_0^2} + \frac{K\eta}{\rho_0} + \frac{\eta}{2\rho_0^3} \right) ds$$

(7-30)

となることがわかる。
次に、x 方向のベータトロン振動の変化を見る。

$$x = \eta\delta + x_\beta \qquad (7\text{-}31)$$

$$x' = \eta'\delta + x'_\beta \qquad (7\text{-}32)$$

と分解する。放射によって、x、x' は変化しないので、放射による δ、x_β、x'_β の変化を各々 Δ_δ、Δx_β、$\Delta x'_\beta$ とすると、

$$0 = \eta \Delta_\delta + \Delta x_\beta \qquad (7\text{-}33)$$

$$0 = \eta' \Delta_\delta + \Delta x'_\beta \qquad (7\text{-}34)$$

であり、

$$\Delta x_\beta = -\eta \Delta_\delta \qquad (7\text{-}35)$$

$$\Delta x'_\beta = -\eta' \Delta_\delta \qquad (7\text{-}36)$$

となる。従って、Courant –Snyder 不変量の変化は、Δ_δ の１次の項のみとると、

$$\Delta a^2 = -2\Delta_\delta \left(\frac{1+\alpha^2}{\beta} x_\beta \eta + \alpha x_\beta \eta' + \alpha x'_\beta \eta + \beta x'_\beta \eta' \right)$$

(7-37)

となる。$\Delta_\delta = \Delta E / E_0$ だから、これと式(7-26)より、

$$\Delta a^2$$
$$= 2\frac{P_{\gamma 0}}{E_0}\frac{\Delta s}{c} \left[1 + \left(2 + 2\rho_0 K\eta + \frac{\eta}{\rho_0} \right)\delta + \left(2\rho_0 K + \frac{1}{\rho_0} \right) x_\beta \right]$$
$$\times \left(\frac{1+\alpha^2}{\beta} x_\beta \eta + \alpha x_\beta \eta' + \alpha x'_\beta \eta + \beta x'_\beta \eta' \right)$$

(7-38)

ここで、これの平均を取る。多数の周回にわたる平均と考えても、多数の粒子の平均と考えても良く、ベータートロン振動の式(4-5)、(4-8)で ϕ または ϕ_0 についての平均を取ることで得られる。すると、x_β、x'_β の１次の項は消え、

$$\left\langle \Delta a^2 \right\rangle = 2\frac{P_{\gamma 0}}{E_0}\frac{\Delta s}{c} \left(2\rho_0 K + \frac{1}{\rho_0} \right)$$
$$\times \left[\left(\frac{1+\alpha^2}{\beta} \eta + \alpha \eta' \right) \left\langle x_\beta^2 \right\rangle + (\alpha\eta + \beta\eta') \left\langle x_\beta x'_\beta \right\rangle \right]$$

(7-39)

となるがさらに、$\left\langle x_\beta^2 \right\rangle = \beta a^2 / 2$、$\left\langle x_\beta x'_\beta \right\rangle = -\alpha a^2 / 2$、$\left\langle x'^2_\beta \right\rangle = (1 + \alpha^2 / \beta) a^2 / 2$ であることから、

$$\left\langle \Delta a^2 \right\rangle = \frac{P_{\gamma 0}}{E_0}\frac{\Delta s}{c} \left(2\rho_0 K + \frac{1}{\rho_0} \right) \eta a^2 \qquad (7\text{-}40)$$

となる。リング１周での放射による変化はこれを全周で積分すれば良い。
一方加速空洞では、１次近似で、

$$\Delta x_\beta = 0 \qquad (7\text{-}41)$$

$$\Delta x'_\beta = -\frac{U_0}{E_0} x'_\beta \tag{7-42}$$

だから、

$$\left\langle \Delta a^2 \right\rangle = -\frac{U_0}{E_0} 2\left(\alpha \left\langle x_\beta x'_\beta \right\rangle + \beta \left\langle x'^2_\beta \right\rangle\right) = -\frac{U_0}{E_0} a^2 \tag{7-43}$$

となる。

以上から、リング１周当りの a^2 の変化は、

$$\left\langle \Delta a^2 \right\rangle = -\left(\frac{U_0}{E_0} - \frac{P_{\gamma 0}}{E_0} \int \frac{ds}{c} \left(2\rho_0 K + \frac{1}{\rho_0}\right)\eta\right) a^2 \tag{7-44}$$

であり、a^2 の平方根がベータトロン振動の振幅を与えるので、減衰率は

$$\frac{1}{\tau_x} = \frac{1}{E_0 T_0}\left[\frac{U_0}{2} - \frac{2r_e mc^2 \gamma_0^4}{3} \int \left(\frac{K\eta}{\rho_0} + \frac{\eta}{2\rho_0^3}\right) ds\right]$$
$$= \frac{1}{E_0 T_0} \frac{2r_e mc^2 \gamma_0^4}{3} \int \left(\frac{1}{2\rho_0^2} - \frac{K\eta}{\rho_0} - \frac{\eta}{2\rho_0^3}\right) ds \tag{7-45}$$

となる。これと、$1/\tau_z$ の結果と比べると、

$$\frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_z} = \frac{3U_0}{2E_0 T_0} \tag{7-46}$$

という関係があることがわかる。

最後に、y 方向のベータトロン振動の変化を見る。設計軌道が水平面内にあると仮定しているので、η_y、η'_y はゼロとしてよく、放射による y 方向のベータトロン振動の振幅の変化は無視できる。従って、加速空洞での振幅の変化のみ考えればよく、x 方向の場合と同じで、Courant –Snyder 不変量の変化は、１周当り

$$\Delta a^2 = -\frac{U_0}{E_0} a^2 \tag{7-47}$$

となる。従って、減衰率は、

$$\frac{1}{\tau_y} = \frac{U_0}{2E_0 T_0} \tag{7-48}$$

である。

ところで、一般に（垂直方向の軌道変化がある場合でも）

$$\frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y} + \frac{1}{\tau_z} = \frac{2U_0}{E_0 T_0} \tag{7-49}$$

という関係が成り立つ。

なお、各々の方向について、「damping partition number」 $J_{x,y,z}$ を、

$$\frac{U_0}{2E_0 T_0} J_{x,y,z} = \frac{1}{\tau_{x,y,z}} \tag{7-50}$$

のように定義すると、

$$J_x + J_y + J_z = 4 \tag{7-51}$$

が成り立つ。

7.3. 放射励起

シンクロトロン放射によるエネルギー損失と、加速電圧によるその補填によって粒子の振動は減衰する。しかし一方では、（前節では考えに入れなかった）シンクロトロン放射の量子論的効果により粒子のエネルギーにでたらめな変化が生じるため、粒子の振動を励起する作用もある。これを「放射励起」と呼ぶ。ここでは、放射による時間当たりの粒子のエネルギーの損失を、量子効果も含めて考える。

7.3.1. 基準エネルギーの再定義

ここで下準備として、エネルギーのずれ δ の定義について少し考え直す。

これまでは、E_0 を基準となるエネルギー、E を粒子のエネルギーとして、$\delta = (E - E_0)/E_0$ としてきたが、シンクロトロン放射のためにビームの平均えねるぎーは一定でなく、加速空洞の後で高く、その後に小さくなっていく（Fig. 10 参照）。

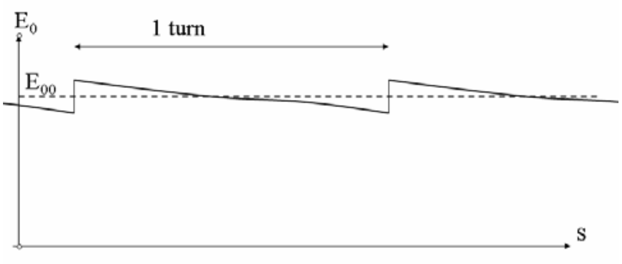

Fig. 10, 基準エネルギーの再定義

以下では、図のように放射による損失を考慮して、場所に依存した平均エネルギーをE_0、場所に依存しない共通の基準となるエネルギーをE_{00}とし、エネルギーのずれを

$$\delta \equiv \frac{(E-E_0)}{E_{00}} \tag{7-52}$$

と定義する。

7.3.2. 放射によるエネルギーのずれの変化

時間Δtの間に放射によって失うエネルギーをΔ_Eと書くことにする。

先（6.1 節）に述べた単位時間当りに放出するエネルギーがuと$u+du$の間にある光子の個数の期待値$n(u)du$を使って、Δ_Eの期待値$\langle \Delta_E \rangle$と、${\Delta_E}^2$の期待値$\langle {\Delta_E}^2 \rangle$を計算してみる（各ビーム粒子に対する期待値を$\langle\ \rangle$で表す。これを多数の粒子についての平均と考えてもよい）。

なお、放射エネルギーの、粒子のエネルギーのずれや位置への依存性については、放射減衰のところで考慮に入れているので、ここでは無視する。

まず、$\langle \Delta_E \rangle$であるが、微小なエネルギー幅$u \sim u+du$の間の光子の個数の期待値は$n(u)du\Delta t$であるから、$u \sim u+du$の間の光子放出によるエネルギー損失の期待値は、$un(u)du\Delta t$で、

$$\langle \Delta_E \rangle = \int_0^\infty un(u)du\Delta t \tag{7-53}$$

となることは明らかであろう。これは、

$$\langle \Delta_E \rangle = \mathcal{N}\bar{u}\Delta t = P_\gamma \Delta t \tag{7-54}$$

と書ける。

次に$\langle {\Delta_E}^2 \rangle$であるが、$\langle \Delta_E \rangle$ほどは簡単に計算できない。時間$\Delta t$の間に多数の光子が放出される可能性を考慮していくと簡単な式が導けない。そこで、放出光子の個数がほとんどゼロになるように時間Δtを微小にとる（$\mathcal{N}\Delta t \ll 1$）。そうすれば、

$$\langle {\Delta_E}^2 \rangle \approx \int_0^\infty u^2 n(u)du\Delta t \tag{7-55}$$

となることはすぐにわかる。（光子が m 個出る確率は、Δt^mに比例するので、Δtが十分小さい場合は光子 1 個の場合のみ考慮すればよい。）

ここで、放射による、エネルギーの基準値からのずれ、$\delta = (E-E_0)/E_{00}$の時間Δtの間の変化Δ_δを考える。まず、基準となるエネルギー（多数の粒子の平均エネルギーと考えることもできる）E_0は一定でなくΔtの間に$\langle \Delta_E \rangle$だけ減少することに注意する。

δの変化の平均はゼロ、すなわち、

$$\langle \Delta_\delta \rangle = \left\langle \frac{E-\Delta_E-\left(E_0-\langle \Delta_E \rangle\right)}{E_{00}} - \frac{E-E_0}{E_{00}} \right\rangle = 0 \tag{7-56}$$

であるが、2 乗平均、$\langle {\Delta_\delta}^2 \rangle$は、

$$\langle {\Delta_\delta}^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{E-\Delta_E-\left(E_0-\langle \Delta_E \rangle\right)}{E_{00}} - \frac{E-E_0}{E_{00}} \right)^2 \right\rangle = \frac{\langle {\Delta_E}^2 \rangle - \langle \Delta_E \rangle^2}{E_{00}^2} \tag{7-57}$$

となる。

時間当たりのδ^2の変化は、

$$\frac{\langle {\Delta_\delta}^2 \rangle}{\Delta t} = \frac{\langle {\Delta_E}^2 \rangle - \langle \Delta_E \rangle^2}{E_{00}^2 \Delta t} \tag{7-58}$$

であるが、$\langle \Delta_E \rangle \propto \Delta t$、$\langle {\Delta_E}^2 \rangle \propto \Delta t$であるから、$\Delta t \to 0$とすることにより分子の第 2 項は無視できて、

$$\frac{\left\langle {\Delta_\delta}^2 \right\rangle}{\Delta t} = \frac{\int_0^\infty u^2 n(u) du}{E_{00}^2} = \mathcal{N} \frac{\overline{u^2}}{E_{00}^2} \qquad \text{(7-59)}$$

となる。

7.3.3.　シンクロトロン振動の放射励起

やっと準備ができたので、まずシンクロトロン振動の振幅の２乗

$$A_\delta^2 = \delta^2 + \frac{eV\omega\cos\psi_0}{-T_0\eta_c E_0} t^2 \qquad \text{(7-60)}$$

が放射でどう変わるかを見る。第２項は放射で変化しないので、 A_δ^2 の変化は δ^2 の変化に等しく、

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta A_\delta^2 \right\rangle &= \left\langle (\delta + \Delta_\delta)^2 - \delta^2 \right\rangle = \left\langle {\Delta_\delta}^2 \right\rangle \\ &= \mathcal{N} \frac{\overline{u^2}}{E_{00}^2} \Delta t = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{\Delta t}{E_{00}^2} P_\gamma u_c \end{aligned} \qquad \text{(7-61)}$$

従って、1 周あたりの $\left\langle A_\delta^2 \right\rangle$ の変化は、

$$\frac{d\left\langle A_\delta^2 \right\rangle}{dn} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{T_0}{E_{00}^2} \overline{P_\gamma u_c} \qquad \text{(7-62)}$$

となる（n は周回数）。さらに

$$\begin{aligned} \overline{P_\gamma u_c} &= \hbar r_e m c^3 \gamma_0^7 \overline{\left(\frac{1}{\rho_0^3} \right)} \\ &= \frac{\hbar r_e m c^c \gamma_0^7}{T_0} \int_0^{cT_0} \frac{1}{\rho_0^3} ds \end{aligned} \qquad \text{(7-63)}$$

である（ここでの上バーはリング全周での平均）。

7.3.4.　ベータトロン振動の放射励起

ここでは、ベータトロン振動の Courant –Snyder 不変量 a^2 の変化を見る。

$x = \eta\delta + x_\beta$ 、 $x' = \eta'\delta + x'_\beta$、と分解して考え、前と同じように放射による変化は、

$$\Delta x_\beta = -\eta \Delta\delta \qquad \text{(7-64)}$$

$$\Delta x'_\beta = -\eta' \Delta\delta \qquad \text{(7-65)}$$

であることから、

$$\left\langle \Delta a^2 \right\rangle = \left(\frac{1+\alpha^2}{\beta} \eta^2 + 2\alpha\eta\eta + \beta\eta'^2 \right) \left\langle {\Delta_\delta}^2 \right\rangle \qquad \text{(7-66)}$$

であることがわかる（先に述べたように、放射の、x 、δ への依存性は放射減衰に効くが、既に考慮しているので、ここでは無視している）。ここで、curly-H と呼ばれる関数

$$\mathscr{H} \equiv \frac{1+\alpha^2}{\beta} \eta^2 + 2\alpha\eta\eta + \beta\eta'^2 \qquad \text{(7-67)}$$

を定義して、短く、

$$\left\langle \Delta a^2 \right\rangle = \mathscr{H} \left\langle {\Delta_\delta}^2 \right\rangle \qquad \text{(7-68)}$$

と書く。

$\left\langle {\Delta_\delta}^2 \right\rangle$ について、前と同様の式の変形により、 1 周当たりの変化は、

$$\frac{d\left(a^2 \right)}{dn} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{T_0}{E_{00}^2} \overline{\mathscr{H} P_\gamma u_c} \qquad \text{(7-69)}$$

と書けることがわかる。ここで、

$$\overline{\mathscr{H} P_\gamma u_c} = \frac{\hbar r_e m c^2 \gamma^7}{T_0} \int_0^{cT_0} \frac{\mathscr{H}}{\rho^3} ds \qquad \text{(7-70)}$$

である。

　ここでは、あえて、添字 x、y を付けなかった。それは、x でも y でも全く同じ形に書けるからである。しかし設計軌道が水平面内にある場合、x 方向の curly-H の設計値は有限であるのに対し、y 方向の curly-H の設計値はゼロである。従って、x 方向の放射励起は y 方向に比べて大きい。ただ、y 方向の励起がゼロになるわけではない。実際の加速器には、必ず磁石の設置誤差や磁場の誤差があるので、y 方向の curly-H も完全にゼロになることはない。また、6.1 節の最後に触れたように、厳密には放射によって角度のばらつきも生じるので、誤差のない完全な加速器であっても放射による励起をゼロにすることはできない。実在する加速器では角度のばらつきによる励起は、誤差に

よって生じる curly-H による励起に比べて非常に小さいと言われている。

7.4. 平衡エミッタンス

7.4.1. 粒子が正規分布に従うこと

数学の「中心極限定理」によれば、同一の確率分布を持つ独立な確率変数の多数の和（あるいは平均）の分布は正規分布に近づく（個数を無限にした極限で正規分布になる）。でたらめなものをたくさん足し合わせると正規分布になるのである。
入射後減衰時間に比べて長時間経過した後の x_β は、正規分布になることを説明する。それまでの放射励起による変化からの減衰振動の結果の和となる。大雑把に、

$$x_\beta(s) \sim \sum_i \Delta_{x\beta} \sin(\phi(s) - \phi(s_i)) \exp\left(-\frac{(s - s_i)}{c\tau_x}\right) \tag{7-71}$$

のように書ける（あくまで大雑把な式である）。
$\Delta_{x\beta}$ はある確率分布を持つ励起を表す（励起後の減衰振動は確率過程ではない）。ここで、減衰時間に比べて長い過去の励起の効果は減衰によって消えてしまうので、「同一の確率分布を持つ」「多数の和」という条件を満たすには、放射励起が減衰時間程度の間に非常に多くの回数起きることが必要である。この条件は、$\mathcal{N}\tau >> 1$ と書けるが、

$$\mathcal{N} = \frac{15\sqrt{3}}{8}\frac{P_\lambda}{u_c}、\quad \tau \approx \frac{E_0}{P_\lambda} \tag{7-72}$$

であるから、

$$\frac{E_0}{u_c} >> 1 \tag{7-73}$$

であればよい。u_c は１個の光子の持つ平均的なエネルギーである。１個の光子放出で粒子のエネルギーの大きな部分が失われてしまうようなリング加速器のビームが安定であるとは考えられないので、この条件は実際上常に成り立つと考えてよい。

従って、長時間経過後の x_β の確率分布は正規分布に従う。ビーム内の多数の粒子を考えれば、x_β の分布は正規分布になる。
x'_β、y_β、y'_β、t、δ についても全く同じ議論によって、正規分布になることが言える。
又、放射励起は振動の位相に関係なく起きる（でたらめな位相で起きる）ので、結果として振幅と位相の間には相関がないはずである。従って横方向の粒子の分布は 4.2.6 節で述べたような、縦方向の粒子の分布は 5.3 節で述べたような、マッチングのとれた状態になる。従って、各方向のエミッタンスは、振幅の２乗平均に比例した量になる。

7.4.2. 平衡状態

エミッタンスが変化しない平衡状態は、放射励起と放射減衰の釣り合った状態として、

$$\left(\frac{d\varepsilon_{x,y,z}}{dn}\right)_{\mathrm{excite}} + \left(\frac{d\varepsilon_{x,y,z}}{dn}\right)_{\mathrm{damp}} = 0 \tag{7-74}$$

（excite は放射励起 damp は放射減衰の寄与を表す）と表される。
いくつかのリング１周分の積分を

$$I_2 \equiv \int_0^{cT_0} \frac{ds}{\rho_0^2} \tag{7-75}$$

$$I_3 \equiv \int_0^{cT_0} \frac{ds}{\rho_0^3} \tag{7-76}$$

$$I_4 \equiv \int_0^{cT_0} \left(\frac{2K}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0^3}\right)\eta_x ds \tag{7-77}$$

$$I_{5,x(y)} \equiv \int_0^{cT_0} \frac{\mathscr{H}_{x(y)}}{\rho_0^3} ds \tag{7-78}$$

と書き（ρ_0は正）、これまでの結果をまとめると、

$$\left(\frac{d\varepsilon_x}{dn}\right)_{\mathrm{damp}} = -\frac{2T_0}{\tau_x}\varepsilon_x = -\frac{2r_e\gamma_0^3}{3}(I_2 - I_4)\varepsilon_x \tag{7-79}$$

$$\left(\frac{d\varepsilon_y}{dn}\right)_{\text{damp}} = -\frac{2T_0}{\tau_y}\varepsilon_y = -\frac{2r_e\gamma_0^3}{3}I_2\,\varepsilon_y \quad (7\text{-}80)$$

$$\left(\frac{d\varepsilon_z}{dn}\right)_{\text{damp}} = -\frac{2T_0}{\tau_z}\varepsilon_z = -\frac{2r_e\gamma_0^3}{3}(2I_2 + I_4)\varepsilon_z \quad (7\text{-}81)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\varepsilon_x}{dn}\right)_{\text{excite}} &= \frac{55}{48\sqrt{3}}\frac{T_0}{E_{00}^2}\overline{\mathscr{H}_x\,P_\gamma u_c} \\ &= \frac{55}{48\sqrt{3}}\frac{\hbar r_e\gamma_0^5}{mc^2}I_{5,x}\end{aligned} \quad (7\text{-}82)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\varepsilon_y}{dn}\right)_{\text{excite}} &= \frac{55}{48\sqrt{3}}\frac{T_0}{E_{00}^2}\overline{\mathscr{H}_y\,P_\gamma u_c} \\ &= \frac{55}{48\sqrt{3}}\frac{\hbar r_e\gamma_0^5}{mc^2}I_{5,y}\end{aligned} \quad (7\text{-}83)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\varepsilon_z}{dn}\right)_{\text{excite}} &= \frac{55}{48\sqrt{3}}c\frac{T_0\eta_c}{\Omega}\frac{T_0}{E_{00}^2}\overline{P_\gamma u_c} \\ &= \frac{55}{48\sqrt{3}}\frac{T_0\eta_c}{\Omega}\frac{\hbar r_e\gamma_0^5}{mc}I_3\end{aligned} \quad (7\text{-}84)$$

となる。これらから、平衡エミッタンスが以下のように得られる。

$$\varepsilon_x = \frac{55\sqrt{3}}{96}\frac{\hbar\gamma_0^2}{mc^2}\frac{I_{5,x}}{I_2 - I_4} \quad (7\text{-}85)$$

$$\varepsilon_y = \frac{55\sqrt{3}}{96}\frac{\hbar\gamma_0^2}{mc^2}\frac{I_{5,y}}{I_2} \quad (7\text{-}86)$$

$$\varepsilon_z = \frac{55\sqrt{3}}{96}\frac{\hbar\gamma_0^2}{mc}\frac{T_0\eta_c}{\Omega}\frac{I_3}{2I_2 + I_4} \quad (7\text{-}87)$$

平衡エミッタンスを小さくしたり、減衰時間を短くするために、しばしばウィグラーが使われる。軌道をリングに沿って曲げるための偏向磁石では水平方向のディスパージョンが大きくなり、I_2 だけでなく I_3、$I_{5,x}$ への寄与も生じる。直線部分にピッチの短いウィグラーを置く（向きが反対の偏向磁石を交互に置く）ことにより、I_3、$I_{5,x}$ をあまり変えずに、I_2 を大きくできるからである。

7.5. 電子と陽子の放射の効果の比較

シンクロトロン放射は電子加速器では重要だが、陽子や他の原子核の加速器ではほとんど考える必要がないと言われる。ここではそれを大雑把な計算で確かめてみたい。

電子加速器の例として、エネルギー8GeV、半径500m の完全に円形なリング（実際の加速器には偏向磁場のない直線部があるのだが、ここでは無視する）を考える。これは KEKB のパラメータに近い（同じではない）。

陽子加速器の例として、エネルギー7TeV、半径4500m の完全に円形なリングを考える。これは LHC のパラメータに近い（同じではない）。ところで、$P_\gamma \propto E^2B^2$ であることを考えると、磁場の強さが同じであれば、エネルギーが高く曲率半径が大きい方が放射のパワーは大きくなる。従って、現在（2012 年）LHC 以上にシンクロトロン放射のパワーが大きい陽子加速器はない。

式(7-23)から、電子の場合と陽子の場合の放射パワーの比は

$$\frac{P_{\gamma,e}}{P_{\gamma,p}} = \left(\frac{\gamma_e}{\gamma_p}\right)^4\left(\frac{\rho_e}{\rho_p}\right)^{-2} \approx 2^4 \times \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \approx 1300 \quad (7\text{-}88)$$

である。ここで、電子と陽子のパラメータに各々添字 e と p を付けた。電子の放射パワーは陽子に比べ 1300 倍大きい。

さらに、放射による減衰時間は、$\tau \sim E_0/P_\gamma$ であるから、

$$\frac{\tau_p}{\tau_e} \sim \left(\frac{E_{0,e}}{E_{0,p}}\right)^{-1}\frac{P_{\gamma,e}}{P_{\gamma,p}} \approx 1.1\times10^6 \quad (7\text{-}89)$$

となり、陽子ビームの減衰時間が百万倍長いことがわかる。計算してみると、

$$\tau_e \approx 0.1\ \text{秒} \quad (7\text{-}90)$$

$$\tau_{\mathrm{p}} \approx 40\ \text{時間} \quad (7\text{-}91)$$

である。

8. Hamiltonian による扱いの例

ビーム力学と言うと Hamiltonian 形式での記述がよく出てくる。Hamiltonian を使うと議論が抽象的になり実際の物理現象との対応が希薄になる気がすることもあるが、扱う問題によっては見通しがよくなり、非常に便利である。粒子間の相互作用がなければ、各粒子の運動は Hamiltonian で記述できるであろう。ここでは、１自由度の運動について Hamiltonian を使った簡単な例を説明する。

Hamiltonian とは何か、電磁場中の荷電粒子の運動を Hamiltonian を使って記述する方法など、詳しいことは述べない。

8.1. 準備

ここでは、Hamiltonian による１自由度の力学について以下で使用するための最低限のことを述べておく。詳しいいことは解析力学の教科書などを参照していただきたい。

１自由度の運動を記述する Hamiltonian は、一般化座標(x)、一般化運動量(p)と独立変数(t)の関数である。

$$H = H(x, p; t) \tag{8-1}$$

このテキストでは、括弧内の独立変数の前にセミコロンを付けることにする。

Hamiltonian から、運動方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{8-2}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{8-3}$$

が得られる。また、これから、

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{dp}{dt}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{8-4}$$

であるので、Hamiltonian は独立変数を顕に含まないならば不変量である。

「generation function」 $G_1(x, x_1; t)$ により以下のような関係式を用いて (x, p) から (x_1, p_1) へ変数変換（正準変換）を行うことができる。

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial G_1}{\partial x} \\ p_1 &= -\frac{\partial G_1}{\partial x_1} \end{aligned} \tag{8-5}$$

このとき新たな Hamiltonian は

$$H_1 = H + \frac{\partial G_1}{\partial t} \tag{8-6}$$

になる。

また、別の型の generating function $G_2(x, p_1; t)$ による (x, p) から (x_1, p_1) へ変数変換（正準変換）も可能である。

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial G_2}{\partial p_1} \\ p &= \frac{\partial G_2}{\partial x} \end{aligned} \tag{8-7}$$

$$H_1 = H + \frac{\partial G_2}{\partial t} \tag{8-8}$$

変換後も運動方程式

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial p_1} \tag{8-9a}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_1} \tag{8-9b}$$

が成り立つことは上の関係式から直接確かめることもできる。

8.2. 横方向の運動の例

ベータトロン振動の規格化座標

$$X \equiv \frac{x}{\sqrt{\beta}} \tag{8-10}$$

$$P \equiv \frac{dX}{d\phi} = \sqrt{\beta}x' + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}x \tag{8-11}$$

が、線形近似で調和振動することから出発する。（$\dot{X}$ のかわりに P と書いた。）

ここで、独立変数を$\varphi \equiv \phi/\nu$とする。νはチューン、であり、ϕは振動の位相だから、φはリング１周すると2π増える量である。Hamiltonian を

$$H(X,P;\varphi)=\frac{1}{2}\left(\frac{P^2}{\nu}+\nu X^2\right) \tag{8-12}$$

とすれば、運動方程式

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\varphi}&=\frac{\partial H}{\partial X}=P/\nu\\ \frac{dP}{d\varphi}&=-\frac{\partial H}{\partial P}-\nu X\end{aligned} \tag{8-13}$$

が導かれることがわかる。（φの前のセミコロンはφが独立変数であることを示す。）

generating function

$$G_1(X,\phi)=-\frac{1}{2}\nu X^2\tan\phi \tag{8-14}$$

を使って運動を表す変数(X,P)を(ϕ,J)に変える。すなわち、

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial X}&=P\\ \frac{\partial G}{\partial \phi}&=-J\end{aligned} \tag{8-15}$$

より、

$$\begin{aligned}\tan\phi&=\frac{-P}{\nu X}\\ J&=\frac{\nu X^2}{2\cos^2\phi}=\frac{1}{2}\left(\nu X^2+\frac{P^2}{\nu}\right)\end{aligned} \tag{8-16}$$

あるいは、逆に、

$$\begin{aligned}X&=\sqrt{\frac{2J}{\nu}}\cos\phi\\ P&=-\sqrt{2J\nu}\sin\phi\end{aligned} \tag{8-17}$$

である。Hamiltonian は、

$$H=\nu J \tag{8-18}$$

となり、これから運動方程式、

$$\begin{aligned}\dot{J}&=-\frac{\partial H}{\partial \phi}=0\\ \dot{\phi}&=\frac{\partial H}{\partial J}=\nu\end{aligned} \tag{8-19}$$

が得られる。ここで、文字の上の点は独立変数φでのを表す。第２式は$\varphi=\phi/\nu$からほぼ自明である。また、少し計算してみればわかるように、実はJ/νは Courant –Snyder 不変量なので、第１式もすでに知っていることであり、ここまでの話は全く面白くない。

ここで、リングの中に余分な磁場があるとすると、変数の組を(X,P)に戻して、

$$H(X,P;\varphi)=\frac{1}{2}\left(\frac{P^2}{\nu}+\nu X^2\right)+\sum_n a_n(\varphi)\nu^{n/2}X^n \tag{8-20}$$

のようにかけるであろう。$a_n(\varphi)$が n-極成分の余分な磁場の強さのリングに沿っての分布を表し、φの定義から周期2πの周期関数でなければならない（$a_n(2\pi+\varphi)=a_n(\varphi)$）。

運動を表す変数(X,P)を(ϕ,J)に変えると、

$$H(X,P;\varphi)=\nu J+\sum_n a_n(\varphi)(2J)^{n/2}\cos^n\phi \tag{8-21}$$

$a_n(\varphi)$は周期関数なので以下のように展開できる。

$$a_n(\varphi)=\sum_{k=\text{integer}} b_{nm}\exp(ik\varphi) \tag{8-22}$$

又、

$$\cos^n\phi=\sum_{m=0}^{n} c_{nm}\cos(m\phi) \tag{8-23}$$

と展開できるので、結局、

$$\begin{aligned}&H(X,P;\varphi)=\\ &\quad\nu J+\sum_n (2J)^{n/2}\sum_k\sum_m d_{nkm}\cos(k\varphi-m\phi)\end{aligned} \tag{8-24}$$

のように書けるであろう。

ここで共鳴について考えてみる。先にチューンが整数、半整数の場合の共鳴を見たが、その考えを

進めれば、小さな余分の磁場（磁場の誤差）が重要になるのは、チューンが整数プラス簡単な分数になっているか、またはそれに非常に近い場合であることが予測できるであろう。そのことは、上の式で、

$$(k\varphi - m\phi) = (k - m\nu)\varphi \approx \text{integer} \times \varphi \tag{8-25}$$

であることに対応している。実際、Hamilton 方程式から、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \varphi} &= \frac{\partial H}{\partial \phi} \\ &= \sum_n (2J)^{n/2} \sum_k \sum_m m d_{nkm} \sin(k\varphi - m\phi) \end{aligned} \tag{8-26}$$

であるから、$\sin(k\varphi - m\phi)$ が短い周期で振動するようであれば、J がどんどん大きくなって発散してしまうようなことはなさそうである。

以下、共鳴が起こるような場合のみ考える。すなわち、

$$\nu \approx k_{\mathrm{r}} / m_{\mathrm{r}} = \nu_{\mathrm{r}} \tag{8-27}$$

の場合を考え、$k = k_{\mathrm{r}}$、$m = m_{\mathrm{r}}$ の項のみを残す。

$$H(X, P; \varphi) = \nu J + A J^{n/2} \cos(k_{\mathrm{r}}\varphi - m_{\mathrm{r}}\phi) \tag{8-28}$$

ここで、A は定数。そして、(ϕ, J) から、(ϕ_1, J_1) への変数変換を generating function

$$G_2(\phi, J_1; \varphi) = J_1(\phi - \nu_{\mathrm{r}}\varphi) \tag{8-29}$$

によって行うと、

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\partial G}{\partial J_1} = \phi - \nu_{\mathrm{r}}\varphi \\ J &= \frac{\partial G}{\partial \phi} = J_1 \end{aligned} \tag{8-30}$$

となり、対応する Hamiltonian は

$$H_1(X, P; \varphi) = \Delta\nu J_1 + A J_1^{n/2} \cos(m_{\mathrm{r}}\phi_1) \tag{8-31}$$

となる。ただし、

$$\Delta\nu \equiv (\nu - \nu_{\mathrm{r}}) \tag{8-32}$$

で、チューンの共鳴からのずれを表した。

Hamiltonian から運動方程式

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= -\frac{\partial H_1}{\partial \phi_1} = A m_{\mathrm{r}} J_1^{n/2} \sin(m_{\mathrm{r}}\phi_1) \\ \dot{\phi}_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial J_1} = \Delta\nu + A(n/2) J_1^{n/2-1} \cos(m_{\mathrm{r}}\phi_1) \end{aligned} \tag{8-33}$$

が得られるが、これを直接解いて運動がどうなっているかを調べるのは困難であろう。しかし、この Hamiltonian は独立変数 φ を顕に含まないので運動の定数である。従って、運動方程式を解かなくても任意の粒子の運動の軌跡が

$$\Delta\nu J_1 + A J_1^{n/2} \cos(m_{\mathrm{r}}\phi_1) = \text{constant} \tag{8-34}$$

という線上にあることがわかる。（これは Hamiltonian を使うことのよく知られた効用のひとつである。）

ここで、$n = m_{\mathrm{r}} = 3$ の場合を具体的に見てみよう。これは、6 極磁場成分によって、チューンが整数の 1/3 である場合の共鳴（third order resonance）の話としてよく出てくる。（ビーム粒子をゆっくりと取り出すためにこの third order resonance の状態を意図的に作り出すことが利用されるようである。振動の振幅の大きくなった粒子のみを取り出すようにすることで少しずつビームを取り出す。）

運動の軌跡は、

$$\Delta\nu J_1 + A J_1^{3/2} \cos(3\phi_1) = C = \text{constant} \tag{8-35}$$

であるが、これは、

$$J_1 + \frac{A}{\Delta\nu} J_1^{3/2} \cos(3\phi_1) = \frac{1}{\Delta\nu} C = \text{constant} \tag{8-36}$$

と書き直せるので、本質的なパラメータは $A/\Delta\nu$ １個だけである。さらに、J_1 に定数を掛けて、

$$R^2 \equiv \left(\frac{A}{\Delta\nu}\right)^2 J_1 \tag{8-37}$$

と置けば（$J_1 \geq 0$ に注意、また、R は $\Delta\nu$ と同じ符号に取ることにする）、

$$R^2 + R^3\cos(3\phi_1) = \frac{1}{\Delta\nu}\left(\frac{A}{\Delta\nu}\right)^2 \mathrm{C} = \mathrm{constant} \quad (8\text{-}38)$$

となる。これは、$u = R\cos\phi_1$、$v = R\sin\phi_1$ とすると、

$$\left(u - \frac{1}{3}\right)\left(u + \frac{2}{3} - \sqrt{3}y\right)\left(u + \frac{2}{3} + \sqrt{3}y\right) = C_0 \quad (8\text{-}39)$$

と書ける。 C_0 は定数。
Fig. 11 に、いくつかの C_0 について $u - v$ 面上での軌跡を描いてみた。式 (8-38) から、この図が $2\pi/3$ 回転対称になることは明らかであろう。 $C_0 = 0$ となる 3 本の直線で囲まれた 3 角形の内部が R の有限な安定な運動を表す。その外側の軌跡は、 3 本の直線に近づきながら R が発散してしまうような曲線となり、不安定な運動を表す。このような境界を与える線を「separatrix」と呼ぶ。
安定な領域での R の最大値は、 (u,v) が、 $\pm\left(1/3, 1/\sqrt{3}\right)$、 $(-2/3, 0)$ の場合で、 $R_{\max} = 4/9$ であることは簡単に確かめられる。$J_1 = R^2(\Delta\nu/A)^2$ であるから、チューンが共鳴に近く（$\Delta\nu$ が小）、6 極磁場成分が大きい（A が大）場合には J_1 が小さくなければ（従って、ベータトロン振動の振幅が小さくなければ）運動が安定にならないことがわかる。

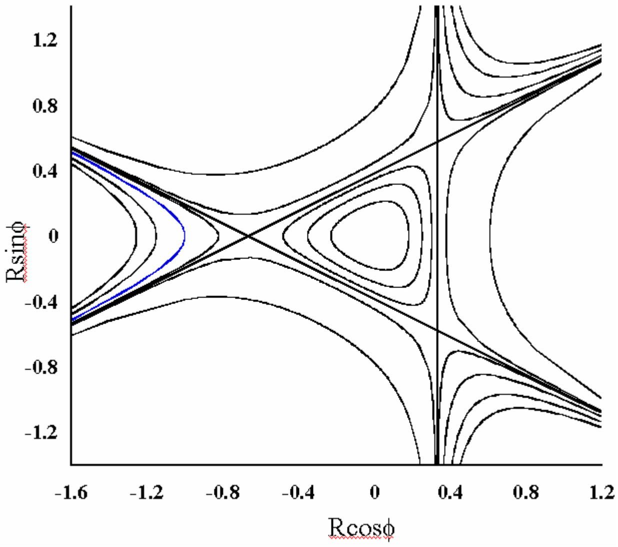

Fig. 11, Third order resonance 付近での運動の軌跡。

8.3. シンクロトロン振動

次に、縦方向の運動についても Hamiltonian を使った例を紹介する。
5.3 節の最初の式

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{eV}{E_0}\sin(\omega t + \psi_0) - \frac{U_0}{E_0} \quad (8\text{-}40)$$

$$\frac{dt}{dn} = T_0\eta_c\delta \quad (8\text{-}41)$$

から出発し、$|\omega t| << 1$ という近似を使わないことにする。
簡単のため、運動を表す変数を、

$$x = -\omega t - \psi_0 + \pi \quad (8\text{-}42)$$

$$p = -\omega\eta_c T_0\delta \quad (8\text{-}43)$$

とすると、運動方程式は

$$\frac{dx}{dn} = p \quad (8\text{-}44)$$

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dn} &= -\omega\eta_c T_0\left[\frac{eV}{E_0}\sin(\omega t + \psi_0) - \frac{U_0}{E_0}\right] \\ &= -\Omega_0^2\left(\sin x - 1/b\right)\end{aligned} \quad (8\text{-}45)$$

となる。ただし、

$$\Omega_0 \equiv \sqrt{\omega\eta_c T_0\frac{eV}{E_0}} \quad (8\text{-}46)$$

$$b \equiv eV/U_0 \quad (8\text{-}47)$$

とした。b は「overhead voltage」と呼ばれ、加速エネルギーのピーク値と 1 周当たりのエネルギー損失の比である。
この運動方程式を直接解くのは難しいが、Hamiltonian は簡単に

$$H(x, p; n) = \frac{1}{2}p^2 - \Omega_0^2\left(\cos x + \frac{1}{b}x\right) \quad (8\text{-}48)$$

であることがわかる。（独立変数として、周回数nを選んだ。）
まず、Hamiltonian が独立変数を顕に含まないので、運動の定数であり、

$$\frac{1}{2}p^2 - \Omega_0^2\left(\cos x + \frac{1}{b}x\right) = \text{constant} \tag{8-49}$$

であることがわかる。
このような線を描いてみた例を Fig. 12 に示す。真ん中の楕円様の図形の内部が安定な領域であり、これと不安定な領域を分ける separatrix が$\propto$のような形になっていることがわかる。又、不動点 $\left(x = \sin^{-1}(1/b),\, p = 0\right)$ には２種類あり、それぞれ、楕円様図形の中心（安定）と、separatrix の交点（不安定）である。
$dx/dn = p$ であるから、粒子はこの図の線上を右回りに辿る（$p<0$ では左、$p>0$ では右向きに移動する）。従って、不安定な粒子は最終的には $x \to +\infty$、$p \to +\infty$ の方向に発散していく。x と p の定義の仕方を考慮すると、これはタイミングが早くなりエネルギーが小さくなっていく方向であることがわかる。

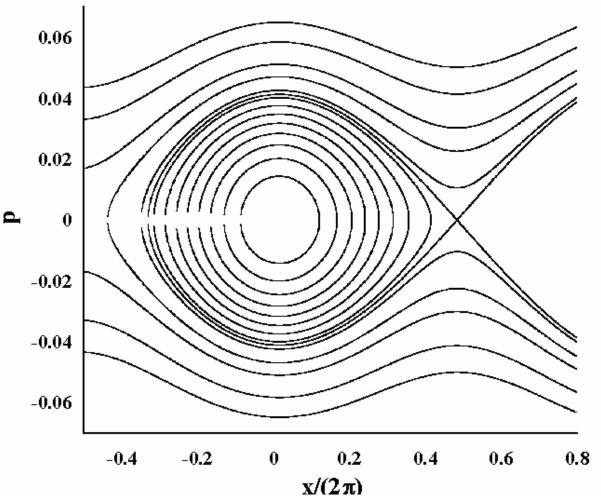

Fig. 12 縦方向の運動の軌跡

参 考 文 献

[1] 小磯晴代、加速器セミナーOHO’91 テキスト

[2] 鎌田進、加速器セミナーOHO’2000 テキスト

[3] 大西幸喜、加速器セミナーOHO’2000 テキスト

[4] Mathew Sands, “The Physics of Electron Storage Rings an Introduction“, SLAC-121, UC28 (1970)

[5] Helmut Wiedemann, “Particle Accelerator Physics”, Springer-Verlag

[6] Helmut Wiedemann, “Particle Accelerator Physics (II)”, Springer

[7] David C. Carey, “The Optics of Charged Particle Beams”, Harwood Academic Publishers

[8] ゴールドシュタイン、「古典力学」、吉岡書店